Aufgabe 12.171

Sei $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

a) Entwickeln Sie $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied und geben Sie das zugehörige Lagrangesche Restglied an!

b) Schätzen Sie mit Hilfe des Lagrangeschen Restgliedes den Fehler ab, der bei der Approximation von $f(0.9)$ durch diese nach dem kubischen Glied abgebrochene Taylorentwicklung entsteht!

c) Vergleichen Sie diese Abschätzung mit dem tatsächlichen Approximationsfehler!

Lösung:

a)
$$\begin{array}{lll} f(x) = \mathrm{e}^{2x} & \qquad & f(1) = \mathrm{e}^2 \\ f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} & & f'(1) = 2\mathrm{e}^2 \\ f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} & & f''(1) = 4\mathrm{e}^2 \\ f'''(x) = 8\mathrm{e}^{2x} & & f'''(1) = 8\mathrm{e}^2 \\ f^{(4)}(x) = 16\mathrm{e}^{2x} & & \end{array}$$

Taylorentwicklung bis zum kubischen Glied:

$$f(x) = \mathrm{e}^2\left(1 + 2(x-1) + \frac{4}{2}(x-1)^2 + \frac{8}{6}(x-1)^3\right) + R_3(x)$$

$$= \mathrm{e}^2\left(1 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3\right) + R_3(x),$$

$$R_3(x) = \frac{16\,\mathrm{e}^{2\bar{x}}}{24}(x-1)^4 = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{2\bar{x}}(x-1)^4, \quad \bar{x} \text{ zwischen } 1 \text{ und } x$$

b) $R_3(0.9) = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{2\bar{x}}(0.9-1)^4, \quad 0.9 < \bar{x} < 1$

Da $\mathrm{e}^{2\bar{x}}$ monoton wachsend ist, gilt $|R_3(0.9)| < \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{2\cdot 1}(-0.1)^4 = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^2\,0.0001 \approx 0.0004926.$

c) $f(0.9) = \mathrm{e}^{1.8} \approx 6.0496474644$

$$P_3(x) = \mathrm{e}^2\left(1 - 2\cdot 0.1 + 2\cdot 0.01 - \frac{4}{3}\cdot 0.001\right) = 6.0491739263$$

Der tatsächliche Fehler beträgt $|f(x) - P_3(x)| \approx 0.0004735$, er wird durch die bei b) ermittelte Abschätzung recht gut erfasst.