Aufgabe 12.168

a) Entwickeln Sie $f(x) = \sqrt{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied!

b) Schätzen Sie mit Hilfe des Restgliedes der Taylorschen Formel den Fehler ab, der entsteht, wenn man $\sqrt{\frac{3}{2}}$ nach dieser Formel berechnet!

c) Welcher Fehler entsteht bei der Berechnung von $\sqrt{\frac{3}{2}}$ nach dieser Formel tatsächlich?

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{2}} & f(0) &= 1\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} & f'(0) &= \frac{1}{2}\\
f''(x) &= -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}} & f''(0) &= -\frac{1}{4}\\
f'''(x) &= \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}} & f'''(0) &= \frac{3}{8}\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}(x+1)^{-\frac{7}{2}}
\end{aligned}$$

$$f(x) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+R_3(x,0), \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}2265625+R_3\left(\frac{1}{2},0\right), \quad \text{d.h. } \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \underline{\underline{1{,}2265625}}$$

b) $$R_3(x,0) = -\frac{15}{16\cdot 24}(\xi+1)^{-\frac{7}{2}}x^4 = -\frac{5}{128}(\xi+1)^{-\frac{7}{2}}x^4, \quad \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } x$$

$$\left|R_3\left(\frac{1}{2},0\right)\right| = \frac{5}{128}(\xi+1)^{-\frac{7}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad 0<\xi<\frac{1}{2}$$

Da $(\xi+1)^{-\frac{7}{2}}$ für $0<\xi<\frac{1}{2}$ monoton fallend ist, kann es durch den Funktionswert am linken rand abgeschätzt werden, so dass $\left|R_3\left(\frac{1}{2},0\right)\right| < \frac{5}{128}\,\frac{1}{16} = \frac{5}{2048} \approx \underline{\underline{0{,}002441}}$ folgt.

c) $$\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}2247449$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-P_3\left(\frac{1}{2},0\right)\right| \approx |1{,}2247449-1{,}2265625| = |-0{,}0018176| = \underline{\underline{0{,}0018176}}$$