Aufgabe 12.166

a) Entwickeln Sie $f(x)=\cos x$ an der Stelle $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied!

b) Schätzen Sie ab, für welche x der Fehler bei der Berechnung von $\cos x$ durch diese nach dem kubischen Glied abgebrochene Taylorentwicklung nicht größer als 10^{-3} ist!

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & \qquad f(\pi/4) &= 1/\sqrt{2} \\ f'(x) &= -\sin x & f'(\pi/4) &= -1/\sqrt{2} \\ f''(x) &= -\cos x & f''(\pi/4) &= -1/\sqrt{2} \\ f'''(x) &= \sin x & f'''(\pi/4) &= 1/\sqrt{2} \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \end{aligned}$$

Taylorentwicklung bis zum kubischen Glied:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)+R_3(x)$$

b) $$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4=\frac{\cos\xi}{24}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4, \quad \xi \text{ zwischen } \frac{\pi}{4} \text{ und } x$$

$$|R_3(x)|=\frac{|\cos\xi|}{24}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 \le \frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 \le 0.001$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 \le 0.024 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|x-\frac{\pi}{4}\right| \le \sqrt[4]{0.024} \approx 0.3936$$

Für $0.3918 \approx \dfrac{\pi}{4}-\sqrt[4]{0.024} \le x \le \dfrac{\pi}{4}+\sqrt[4]{0.024} \approx 1.1790$ ist der Fehler bei der Berechnung von $\cos x$ durch die nach dem kubischen Glied abgebrochene Taylorentwicklung mit Sicherheit nicht größer als 0.001.