Aufgabe 12.165

Berechnen Sie durch Taylorentwicklung der Funktion $f(\varphi)=\sin\varphi$ an der Stelle $\varphi_0=\frac{\pi}{4}$ bis zum quadratischen Glied mithilfe des bekannten Wertes von $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ einen Näherungswert für $\sin 46^\circ$ und schätzen Sie den dabei entstehenden Fehler mit dem Lagrangeschen Restglied ab!

Lösung:

$$f(x)=P_2(x)+R_2(x),\ P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2,$$

$$R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3,\ \xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x$$

$$f(x)=\sin x,\ \ x_0=\frac{\pi}{4},\ \ x-x_0=46^\circ-45^\circ=1^\circ=\frac{\pi}{180},\ \ \sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$P_2(x)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)$$

$$P_2(46^\circ)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1+\frac{\pi}{180}-\frac{\pi^2}{2\cdot 180^2}\right)\approx \underline{\underline{0.719340424}}$$

$$R_2(x)=-\frac{\cos\xi}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$$

Wegen $\frac{\pi}{4}<\xi<46^\circ$ und da die Kosinusfunktion monton fallend ist, folgt

$$|R_2(46^\circ)|\le\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3=\frac{\pi^3}{6\sqrt{2}\cdot 180^3}\approx 6.27\cdot 10^{-7}.$$

(Es gilt $\sin 46^\circ\approx 0.719339800$, so dass der tatsächliche Fehler ca. $6.24\cdot 10^{-7}$ beträgt.)