Aufgabe 12.164

Sei $f(x)=16\sqrt{x}$. Berechnen Sie $f(1{,}1)$ näherungsweise durch Taylorentwicklung von $f(x)$ bis zum kubischen Glied an der Stelle $x_0=1$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab!

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 16\sqrt{x}=16x^{\frac{1}{2}} & f(1) &= 16\\ f'(x) &= 8x^{-\frac{1}{2}} & f'(1) &= 8\\ f''(x) &= -4x^{-\frac{3}{2}} & f''(1) &= -4\\ f'''(x) &= 6x^{-\frac{5}{2}} & f'''(1) &= 6\\ f^{(4)}(x) &= -15x^{-\frac{7}{2}} & f^{(4)}(1) &= -15 \end{aligned}$$

$$f(x)=16+8(x-1)-\frac{4}{2}(x-1)^2+\frac{6}{6}(x-1)^3+R_3(x,1)=\underbrace{16+8(x-1)-2(x-1)^2+(x-1)^3}_{T_3(x,1)}+R_3(x,1)$$

$$T_3(1{,}1\,,\,1)=16+8\cdot 0{,}1-2\cdot 0{,}01+0{,}001=16+0{,}8-0{,}02+0{,}001=\underline{\underline{16{,}781}}$$

$$R_3(1{,}1\,,\,1)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(1{,}1-1)^4=-\frac{15\,\xi^{-\frac{7}{2}}}{24}0{,}1^4,\quad 1<\xi<1{,}1$$

Da $\xi^{-\frac{7}{2}}$ monoton fallend ist, gilt für $1<\xi<1{,}1$, dass $\left|\xi^{-\frac{7}{2}}\right|<1$ ist.

Folglich ist $|R_3(1{,}1\,,\,1)|<\frac{15}{24}0{,}1^4=\frac{5}{8}0{,}0001=0{,}000\,062\,5$.

Die Fehler der Näherung $16\sqrt{1{,}1}\approx 16{,}781$ ist also nicht größer als $0{,}000\,062\,5$.

(Tatsächlich ist $16\sqrt{1{,}1}\approx 16{,}780\,941\,6$, der Fehler also $0{,}000\,058\,4$.)