Aufgabe 12.163

Sei $f(x) = 8x^{3/2}$. Berechnen Sie $f(1{,}1)$ näherungsweise durch Taylorentwicklung von $f(x)$ bis zum quadratischen Glied an der Stelle $x_0 = 1$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab!

Lösung:

$$\begin{array}{lll} f(x) = 8x^{3/2} & \qquad & f(1) = 8 \\ f'(x) = 12x^{1/2} & & f'(1) = 12 \\ f''(x) = 6x^{-1/2} & & f''(1) = 6 \\ f'''(x) = -3x^{-3/2} & & f'''(1) = -3 \end{array}$$

$$f(x) = 8 + 12(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2 + R_2(x,1) = \underbrace{8 + 12(x-1) + 3(x-1)^2}_{T_2(x,1)} + R_2(x,1)$$

$$T_2(1{,}1\,,\,1) = 8 + 12 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}01 = 8 + 1{,}2 + 0{,}03 = \underline{\underline{9{,}23}}$$

$$R_2(1{,}1\,,\,1) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(1{,}1-1)^3 = \frac{-3\,\xi^{-3/2}}{6} 0{,}1^3 = -\frac{\xi^{-3/2}}{2} 0{,}1^3, \quad 1 < \xi < 1{,}1$$

Da $\xi^{-3/2}$ monoton fallend ist, gilt für $1 < \xi < 1{,}1$, dass $\left|\xi^{-3/2}\right| < 1$ ist.

Folglich ist $|R_2(1{,}1\,,\,1)| < \dfrac{0{,}1^3}{2} = 0{,}0005$.

Die Fehler der Näherung $8 \cdot 1{,}1^{3/2} \approx 9{,}23$ ist also nicht größer als $0{,}0005$.

(Tatsächlich ist $8 \cdot 1{,}1^{3/2} \approx 9{,}229518$, der Fehler also $0{,}000482$.)