Aufgabe 12.162

Berechnen Sie $\ln 1{,}1$ näherungsweise durch das quadratische Taylorpolynom von $\ln x$ an der Stelle $x_0 = 1$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab!

Lösung:

$$f(x)=\ln x,\ f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2}{x^3},\quad f(1)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1$$

$$\ln x=\underbrace{0+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2}_{T_2(x,1)}+R_2(x,1),\ \ R_2(x,1)=\frac{2}{3!\,\xi^3}(x-1)^3,\ \ \xi \text{ zwischen 1 und } x$$

$$\ln 1{,}1=0{,}1-\frac{0{,}01}{2}+R_2(1{,}1\,,\,1)=\underline{\underline{0{,}095}}+R_2(1{,}1\,,\,1),$$

$$R_2(1{,}1\,,\,1)=\frac{1}{3\xi^3}\,0{,}1^3,\ \ 1<\xi<1{,}1$$

Da $\frac{1}{\xi^3}$ monoton fallend ist, kann $\frac{1}{\xi^3}$ nach oben durch $\frac{1}{1^3}=1$ abgeschätzt werden, somit gilt

$$|R_2(1{,}1\,,\,1)|=\left|\frac{1}{3\,\xi^3}\,0{,}1^3\right|<\frac{0{,}001}{3}.$$

Die Fehler der Näherung $\ln 1{,}1 \approx 0{,}095$ ist also nicht größer als $0{,}000333$.

(Tatsächlich ist $\ln 1{,}1 \approx 0{,}095310$, der Fehler also $0{,}000310$.)