Aufgabe 12.161

Sei $x < 0$. Schätzen Sie ab, für welche x bei Anwendung der Näherungsformel $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ die Fehlerschranke 0.0001 eingehalten wird!

Lösung:

Bei der Näherungsformel handelt es sich um das Taylorpolynom 4-ten Grades für $f(x) = \mathrm{e}^x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Der Fehler kann daher mit dem Lagrangeschen Restglied angebeben werden: $R_4(x,0) = f^{(5)}(\xi)\frac{x^5}{5!} = \mathrm{e}^\xi \frac{x^5}{5!}$ für einen Zwischenpunkt $x < \xi < 0$.

Da $f(x) = \mathrm{e}^x$ positiv und monoton wachsend ist, gilt wegen $\xi < 0 \quad 0 < \mathrm{e}^\xi < \mathrm{e}^0 = 1$ und daher $|R_4(x,0)| < \frac{|x^5|}{120}$. $\frac{|x^5|}{120} \le 0.0001$ ist äquivalent zu $|x| \le \sqrt[5]{0.012} \approx 0.412892$. Für $\underline{\underline{-0.412892 \le x < 0}}$ gilt daher auch $|R_4(x,0)| < 0.0001$.

Tatsächlich ist $\mathrm{e}^{-\sqrt[5]{0.012}} = 0.661734$ und $P_4(-\sqrt[5]{0.012}) = 0.661827$, so dass der Fehler bei $x = -\sqrt[5]{0.012}$ 0.000093 beträgt.