Aufgabe 12.158

Schätzen Sie ab, für welche Winkel φ bei der näherungsweisen Berechnung des Sinus durch den Ausdruck $\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}$ die Fehlergrenze 10^{-6} eingehalten wird! Interpretieren Sie dabei den gegebenen Ausdruck als Taylorpolynom möglichst hohen Grades!

Lösung:

Die Sinusfunktion hat am Entwicklungspunkt $\varphi_0=0$ die Taylorentwicklung

$$f(\varphi)=\sin\varphi=\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}\pm\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(Diese Taylorentwicklung konvergiert für alle φ gegen $\sin\varphi$, was aber für die gestellte Aufgabe nicht benötigt wird.)

Da wegen $f^{(6)}(0)=-\sin 0=0$ der Term mit der sechsten Potenz verschwindet, kann der gegebene Ausdruck als Taylorpolynom sechsten Grades $T_6(\varphi,0)=\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}$ verstanden werden.

Der Approximationsfehler bestimmt sich mit dem Lagrangeschen Restglied dann zu

$$f(\varphi)-T_6(\varphi,0)=R_6(\varphi,0)=\frac{f^7(\overline{\varphi})}{7!}\varphi^7=\frac{-\cos\overline{\varphi}}{5040}\varphi^7,\ \ \overline{\varphi}\text{ zwischen 0 und }\varphi.$$

Wegen $|\cos\overline{\varphi}|\le 1$ gilt $|R_6(\varphi,0)|\le\frac{|\varphi|^7}{5040}$. Der Fehler $R_6(\varphi,0)$ ist also mit Sicherheit betragsmäßig nicht größer als 10^{-6}, wenn $\frac{|\varphi|^7}{5040}\le 10^{-6}$, d.h. $|\varphi|^7\le 0.00504$, $|\varphi|\lessapprox 0.4697\approx 26.91^\circ$ gilt.

(Tatsächlich gilt z.B. $\sin 0.4697=0.4526187945$, $T_6(0.4697,0)=0.4526197921$, $R_6(0.4697,0)=\sin 0.4697-T_6(0.4697,0)=-9.976\cdot 10^{-7}$.)