Aufgabe 12.156

Beweisen Sie, dass die Taylorentwicklung der Funktion $f(\varphi)=\cos\varphi$ an der Stelle $\varphi_0=0$ für jedes reelle φ gegen $\cos\varphi$ konvergiert!

Lösung:

Es gilt $\cos\varphi \sim 1-\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}\pm\cdots=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}$

und damit $f(\varphi)=T_{2n+1}(\varphi,0)+R_{2n+1}(\varphi,0)$ mit $T_{2n+1}(\varphi,0)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}$ und

$R_{2n+1}(\varphi,0)=\frac{f^{(2n+2)}(\overline{\varphi})}{(2n+2)!}\varphi^{2n+2}=\frac{(-1)^{n+1}\cos\overline{\varphi}}{(2n+2)!}\varphi^{2n+2}$, $\overline{\varphi}$ zwischen 0 und φ

(s. Aufgabe 12.154).

Wegen $|\cos\varphi|\leq 1$ ist $|R_{2n+1}(\varphi,0)|\leq\frac{|\varphi|^{2n+2}}{(2n+2)!}=\frac{|\varphi|}{1}\,\frac{|\varphi|}{2}\,\frac{|\varphi|}{3}\cdots\frac{|\varphi|}{2n+2}$.

Für jedes φ ist irgendwann $\frac{|\varphi|}{2n+2}<1$, vergrößert man von dort aus das n, sind alle weiteren Faktoren noch kleiner, so dass $R_{2n+1}(\varphi,0)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ gilt.

Damit ist $T_{2n+1}(\varphi,0)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}\cos\varphi$, d.h. $\cos\varphi=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}$ für jedes φ.

(Die Konvergenz ist allerdings nicht gleichmäßig, je größer $|\varphi|$ ist, desto langsamer ist die Konvergenz.)