Aufgabe 12.155

Schätzen Sie ab, für welche Winkel φ bei Anwendung der Näherungsformel $\cos\varphi \approx 1-\dfrac{\varphi^2}{2}$ die Fehlerschranke 0.0001 eingehalten wird! Interpretieren Sie dabei den gegebenen Ausdruck als Taylorpolynom möglichst hohen Grades!

Lösung:

Die Kosinusfunktion hat die Taylorentwicklung $\cos\varphi = -\dfrac{\varphi^2}{2}+\dfrac{\varphi^4}{4!}-\dfrac{\varphi^6}{6!}\pm\cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{\varphi^{2k}}{(2k)!}$ (vgl. Aufgabe 12.154, die Taylorentwicklung konvergiert für alle φ gegen $\cos\varphi$).

Da das kubische Glied verschwindet, kann im Interesse der Genauigkeit $1-\dfrac{\varphi^2}{2}$ als Taylorpolynom 3. Grades $T_3(\varphi,0)$ betrachtet werden, es gilt

$\cos\varphi = 1-\dfrac{\varphi^2}{2}+R_3(\varphi,0)$ mit $R_3(\varphi,0)=\dfrac{f^{(4)}(\overline{\varphi})}{4!}\varphi^4=\dfrac{\cos\overline{\varphi}}{24}\varphi^4$, $\overline{\varphi}$ zwischen 0 und φ.

Wegen $|\cos\overline{\varphi}|\le 1$ gilt $|R_3(\varphi,0)|\le\dfrac{\varphi^4}{24}$. Der Fehler $R_3(\varphi,0)$ ist also mit Sicherheit betragsmäßig nicht größer als 0.0001, wenn $\dfrac{\varphi^4}{24}\le 0.0001$, d.h. $\varphi^4\le 0.0024$, $|\varphi|\underset{\approx}{\le} 0.2213\approx 12.68^\circ$ gilt.

Tatsächlich gilt z.B. $\cos 0.2213=0.975612926$, $T_3(0.2213,0)=1-\dfrac{0.2213^2}{2}=0.975513155$, $R_3(0.2213,0)=\cos 0.2213-T_3(0.2213,0)=0.000099771<0.0001$.