Aufgabe 12.153

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-a^2}$ mit einem beliebigen reellen Parameter a.

a) Entwickeln Sie die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ nach der Taylorschen Formel bis zum linearen Glied!

b) Entwickeln Sie für $a = 1$ die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ nach der Taylorschen Formel bis zum quadratischen Glied und stellen Sie in einer Skizze die Funktion und ihre Approximation durch die Taylorpolynome 0-ten, 1-ten und 2-ten Grades gegenüber! (vgl. Aufgabe 12.123)

Lösung:

a) $x_{1/2} = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{24}{4}} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{5}{2} = 2,\,-3,\quad f(x) = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-a)(x+a)}$

Für $a=2$ ist die Funktion am Entwicklungspunkt $x_0=2$ nicht definiert (hebbare Unstetigkeit), deshalb muss dieser Fall gesondert behandelt werden.

Sei zunächst $a \neq 2$: $\quad f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-a^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-a^2)-2x(x^2+x-6)}{(x^2-a^2)^2} = \frac{2x^3-2xa^2+x^2-a^2-2x^3-2x^2+12x}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2+(12-2a^2)x-a^2}{(x^2-a^2)^2},$$

$$f(2)=0,\quad f'(2) = \frac{20-5a^2}{(4-a^2)^2},\quad f(x) \approx \underline{\underline{\frac{20-5a^2}{(4-a^2)^2}(x-2)}}.$$

Für $a=2$ wird $f(x)$ ersetzt durch $\widetilde{f}(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$: $\quad \widetilde{f}'(x) = \dfrac{(x+2)-(x+3)}{(x+2)^2} = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$,

$$\widetilde{f}(2) = \frac{5}{4},\quad \widetilde{f}'(2) = -\frac{1}{16},\quad \widetilde{f}(x) \approx \underline{\underline{\frac{5}{4}-\frac{1}{16}(x-2)}}.$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-1},\quad f'(x) = \dfrac{-x^2+10x-1}{(x^2-1)^2},$

$$f''(x) = \frac{(-2x+10)(x^2-1)^2-4x(x^2-1)(-x^2+10x-1)}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{(-2x+10)(x^2-1)-4x(-x^2+10x-1)}{(x^2-1)^3},$$

$$f(2)=0,\quad f'(2)=\frac{15}{9},\quad f''(x)=\frac{6\cdot 3-8\cdot 15}{3^3} = -\frac{102}{27} = -\frac{34}{9},\quad f(x) \approx \underline{\underline{\frac{15}{9}(x-2)-\frac{17}{9}(x-2)^2}}.$$

Die Taylorpolynome sind

$P_0(x) = 0,$

$P_1(x) = \frac{15}{9}(x-2),$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{15}{9}(x-2) - \frac{17}{9}(x-2)^2 \\ &= \frac{1}{9}(-17x^2 + 83x - 98) \\ &= -\frac{17}{9}\left(x - \frac{83}{34}\right)^2 + \frac{25}{68}. \end{aligned}$$