Aufgabe 12.151

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x^3 - 6x + 3$ im Punkt $x_0 = 2$ nach der Taylorschen Formel!
b) Geben Sie die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades und die zugehörigen Restglieder an! Skizzieren Sie die Funktion und die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades!
c) Bestimmen Sie mithilfe der Taylorpolynome ersten und zweiten Grades Näherungswerte für die in der Nähe von $x_0 = 2$ liegende Nullstelle von $f(x)$!

Lösung:

Taylorsche Formel (unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen):

$$f(x) = \underbrace{\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{Gerade}\\ \text{Approx. von } f(x)\\ \text{durch Tangente in } x_0}} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{\substack{\text{Parabel}\\ \text{Approx. von } f(x) \text{ durch Pol. 2. Grades}\\ \text{(Krümmung erfasst)}}} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x,x_0)$$

Taylorentwicklung ist Verallgemeinerung des Übergangs zur Tangente.

Lagrange–Restglied: $R_n(x,x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ zwischen x_0 und x

Bei Konvergenz: $R_n(x,x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, Taylorreihe: $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$

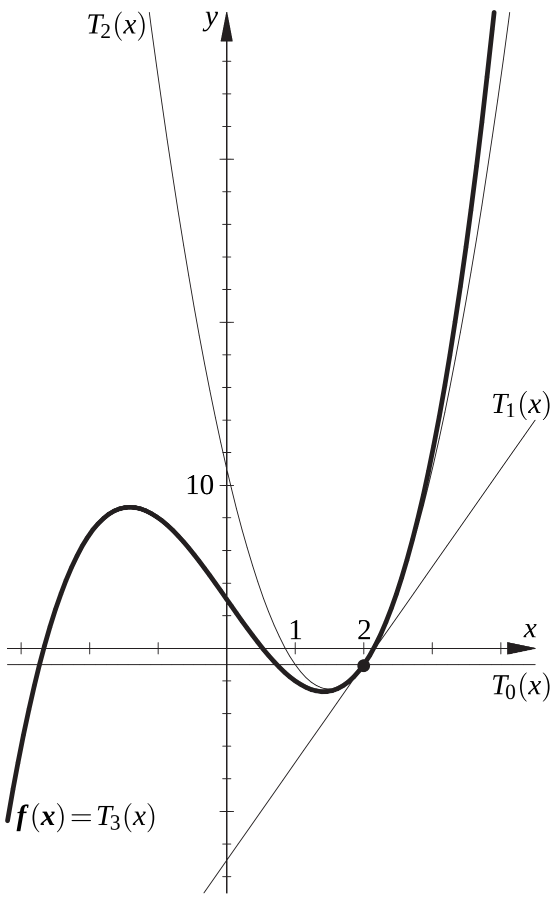
a)
$$\begin{array}{llll}
f(x) & = x^3 - 6x + 3 & f(2) & = -1 \\
f'(x) & = 3x^2 - 6 & f'(2) & = 6 \\
f''(x) & = 6x & f''(2) & = 12 \\
f'''(x) & = 6 & f'''(2) & = 6 \\
f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \cdots = 0 & & f^{(4)}(2) = f^{(5)}(2) = \cdots = 0 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
x^3 - 6x + 3 &= -1 + 6(x-2) + \frac{12}{2}(x-2)^2 + \frac{6}{6}(x-2)^3 \\
&= -1 + 6(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3
\end{aligned}$$

Da es sich bei $f(x)$ selbst um ein Polynom 3. Grades handelt, bricht die Taylorentwicklung nach dem kubischen Glied ab.

b)
$$\begin{array}{lll}
T_0(x,2) = -1: & \text{Konstante,} & R_0(x,2) = (3\xi^2 - 6)(x-2) \\
T_1(x,2) = -1 + 6(x-2) = 6x - 13: & \text{Gerade: Tangente,} & R_1(x,2) = 3\xi\,(x-2)^2 \\
T_2(x,2) = 6x - 13 + 6(x-2)^2 = 6x^2 - 18x + 11: & \text{Parabel,} & R_2(x,2) = (x-2)^3 \\
T_3(x,2) = 6x^2 - 18x + 11 + (x-2)^3 = x^3 - 6x + 3: & \text{kubische Funktion,} & R_3(x,2) = 0
\end{array}$$

Dabei liegt ξ jeweils zwischen 2 und x. Da die genaue Lage von ξ nicht bekannt ist, kann der Fehler in den ersten beiden Fällen damit nur abgeschätzt werden. Da die dritte Ableitung konstant ist, enthält das Restglied bei Abbruch nach dem quadratischen Glied kein ξ. Das Taylorpolynom dritten Grades ist die gegebene Funktion selbst, entsprechend ist das Restglied in diesem Falle 0.



In der Abbildung ist bei der Bezeichnung der Taylorpolynome auf die Angabe des Entwicklungspunktes verzichtet. In ihr wird das Prinzip der Taylorentwicklung deutlich. Die Tangente $T_1(x,2)$ erfasst den Anstieg im Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ und stimmt nur in unmittelbarer Nähe des Entwicklungspunktes mit $f(x) = x^3 - 6x + 3$ gut überein, die Parabel erfasst auch die Krümmung im Entwicklungspunkt und stimmt schon in einem größeren Intervall mit $f(x)$ überein.

c) $f(x) \approx T_1(x,2) = 13x - 6 = 0$ für $x = \dfrac{13}{6} \approx \underline{2.166667}$

$f(x) \approx T_2(x,2) = 6x^2 - 18x + 11 = 0,\ \ x^2 - 3x + \dfrac{11}{6} = 0,$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{11}{6}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{12}} = \begin{cases} \underline{2.145497} \\ 0.854503 \ \ \text{(hier nicht relevante zweite NS der Parabel)} \end{cases}$$

Tatsächlich ist die in der Nähe von 2 liegende Nullstelle von $f(x)$ ungefähr gleich $\underline{2.145103}$.