Aufgabe 12.149

Die Funktion $f(t)=\dfrac{20000}{1+\mathrm{e}^{-at}}$ beschreibe die Anzahl der Nutzer eines Produktes, wobei t die Zeit (gemessen in Jahren) sei. Zum Zeitpunkt $t=1$ hat das Produkt 12000 Nutzer.

a) Wie groß ist der Parameter a ?
b) Welche Nutzerzahl ist zum Zeitpunkt $t=3$ zu erwarten?
c) Zeigen Sie, dass $f(t)$ überall streng monoton wachsend ist!
d) Geben Sie den Wertebereich von $f(t)$ an!
e) Zu welchem Zeitpunkt wird das Produkt von 95 % der maximal möglichen Benutzer genutzt?
f) Zu welchem Zeitpunkt ist das Zuwachstempo (d.h. das Verhältnis der Änderungen von f und t) am größten?

Lösung:

a) $f(1)=\dfrac{20000}{1+\mathrm{e}^{-a}}=12000,\ \ 1+\mathrm{e}^{-a}=\dfrac{20000}{12000}=\dfrac{5}{3},\ \ \mathrm{e}^{-a}=\dfrac{2}{3},\ \ -a=\ln\dfrac{2}{3},\ \ a=-\ln\dfrac{2}{3}\approx 0.40546$

b) $f(3)=\dfrac{20000}{1+\mathrm{e}^{-3\cdot 0.40546}}=15428.57\approx 15429$

c) $f'(t)=\dfrac{0\,(1+\mathrm{e}^{-a})-20000\mathrm{e}^{-at}(-a)}{(1+\mathrm{e}^{-at})^2}=\dfrac{20000a\mathrm{e}^{-at}}{(1+\mathrm{e}^{-at})^2}>0\ \Longrightarrow$ überall monoton wachsend

d) Für $t\to-\infty$ gilt $-at\to\infty,\ \ \mathrm{e}^{-at}\to\infty,\ \ 1+\mathrm{e}^{-at}\to\infty,\ \ f(t)=\dfrac{20000}{1+\mathrm{e}^{-at}}\to 0,$

für $t\to\infty$ gilt $-at\to-\infty,\ \ \mathrm{e}^{-at}\to 0,\ \ 1+\mathrm{e}^{-at}\to 1\ \ f(t)=\dfrac{20000}{1+\mathrm{e}^{-at}}\to 20000.$

Die Grenzwerte 0 und 20000 werden für kein t erreicht. Also ist $W(f)=\{y:0<y<20000\}$.

e) $\dfrac{20000}{1+\mathrm{e}^{-at}}=0.95\cdot 20000=19000,\ \ 1+\mathrm{e}^{-at}=\dfrac{20000}{19000}=\dfrac{20}{19},\ \ \mathrm{e}^{-at}=\dfrac{1}{19},\ \ -at=\ln\dfrac{1}{19},$

$t=-\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{19}=\dfrac{1}{\ln\frac{2}{3}}\cdot\ln\dfrac{1}{19}\approx 7.262$

f) Maß für das Zuwachstempo ist die Ableitung. Daher muss ermittelt werden, wo die Ableitung am größten ist, d.h., es muss eine Extremwertaufgabe für die Ableitung gelöst werden.

Notwendige Extremwertbedingung ist $\dfrac{\mathrm{d}f'(t)}{\mathrm{d}t}=0$, d.h. $f''(t)=0$. Nach c) ist bekannt, dass $f'(t)=\dfrac{20000a\mathrm{e}^{-at}}{(1+\mathrm{e}^{-at})^2}$ gilt.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{20000a\mathrm{e}^{-at}}{(1+\mathrm{e}^{-at})^2}=0\iff\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{e}^{-at}}{(1+\mathrm{e}^{-at})^2}=0$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{e}^{-at}}{(1+\mathrm{e}^{-at})^2}&=\frac{-a\mathrm{e}^{-at}(1+\mathrm{e}^{-at})^2-\mathrm{e}^{-at}2(1+\mathrm{e}^{-at})(-a\mathrm{e}^{-at})}{(1+\mathrm{e}^{-at})^4}\\&=\frac{-a\mathrm{e}^{-at}(1+\mathrm{e}^{-at})-\mathrm{e}^{-at}2(-a\mathrm{e}^{-at})}{(1+\mathrm{e}^{-at})^3}=\frac{-a\mathrm{e}^{-at}}{(1+\mathrm{e}^{-at})^3}(1+\mathrm{e}^{-at}-2\mathrm{e}^{-at})\\&=\underbrace{\frac{-a\mathrm{e}^{-at}}{(1+\mathrm{e}^{-at})^3}}_{\neq 0}(1-\mathrm{e}^{-at})=0\,,\iff\mathrm{e}^{-at}=1\iff -at=\ln 1=0\iff t=0\end{aligned}$$

Extremwertverdächtig ist nur $t = 0$. Da es einen Extremwert geben muss (Sonst könnte das Zuwachstempo unendlich groß werden, was offensichtlich nicht der Fall ist.) und nur eine einzige Stelle dafür in Frage kommt, muss dort der Extremwert liegen. Das Zuwachstempo ist also am größten (d.h. die Funktion am steilsten), wenn $t = 0$ gilt.