Aufgabe 12.148

Der prozentuale Ausstattungsgrad von Haushalten mit Fernsehern in Abhängigkeit von der Jahreszahl t werde durch die Funktion $f(t)=\dfrac{96}{1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}}$ beschrieben.

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(t)$ auf Monotonie und bestimmen Sie ihren Wertebereich!
b) In welchem Jahr hatten 48 % der Haushalte einen Fernseher? Wie groß war in diesem Jahr die Wachstumsgeschwindigkeit des Ausstattungsgrades?
c) In welchem Jahr wuchs der Ausstattungsgrad am stärksten?

Lösung:

a) Da die Exponentialfunktion überall streng monoton wachsend ist, ist $\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}$ und damit auch $1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}$ streng monoton fallend, ihre Reziprokes und damit auch $f(t)$ wiederum überall streng monoton wachsend.

oder $\quad f'(t)=\dfrac{-96\left(-0.2\,\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}\right)}{(1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)})^2}=\dfrac{19.2\,\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}}{(1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)})^2}>0$ überall,

also überall streng monoton wachsend.

$\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=\dfrac{96}{1+\mathrm{e}^{\infty}}=0,\quad \lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\dfrac{96}{1+\mathrm{e}^{-\infty}}=96,$ Wertebereich also $(0,96)$.

b) $\dfrac{96}{1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}}=48,\ 2=1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)},\ 1=\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)},\ -0.2(t-1965)=0,\ t=1965$

$f'(1965)=\dfrac{19.2}{(1+1)^2}=\dfrac{19.2}{4}=4.8$

Im Jahre 1965 betrug der Ausstattungsgrad 48 %, die Ausstattung wuchs damals um 4,8 %/a.

c) Gesucht ist das Maximum von $f'(t)$:

$$f''(t)$$
$$=19.2\frac{-0.2\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}(1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)})^2-\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}\cdot 2(1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)})(-0.2\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)})}{(1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)})^4}$$
$$=19.2\cdot 0.2\,\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}\frac{-(1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)})+2\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}}{(1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)})^3}$$
$$=19.2\cdot 0.2\,\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}\frac{\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}-1}{(1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)})^3}=0\implies \mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}=1\implies t=1965$$

Wegen des Faktors -0.2 im Exponenten ist die Exponentialfunktion monoton fallend, so dass gilt $f''(t)\begin{cases}>0 & t<1965: \quad f'(t) \text{ monoton wachsend}\\ <0 & t>1965: \quad f'(t) \text{ monoton fallend}\end{cases}.$

Somit liegt das Maximum von $f'(t)$ bei 1965, in diesem Jahre wuchs der Ausstattungsgrad am stärksten.