

Aufgabe 12.143

Wie sind die Ausmaße eines zylindrischen Metalltrinkbechers zu wählen, damit er ein Fassungsvermögen von 400 ml hat und zu seiner Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Becher in cm^2 ?

Lösung:

$$V = \pi r^2 h = 0.4 \text{ dm}^3 = 400 \text{ cm}^3, \quad h = \frac{400}{\pi r^2}, \quad O = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + \frac{800}{r} \rightarrow \min,$$

$$O' = 2\pi r - \frac{800}{r^2} \begin{cases} < 0 & r < \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} & \text{monoton fallend} \\ = 0 & r = \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} & \text{Minimum} \\ > 0 & r > \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} & \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

$$\text{minimaler Materialverbrauch bei } r = \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} \approx 5.03 \text{ cm}, \quad h = \frac{400}{\pi \sqrt[3]{\frac{400^2}{\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{400^3 \pi^2}{\pi^3 400^2}} = \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} = r,$$

$$\text{Materialverbrauch dabei } O = 3\pi r^2 \approx 238.6 \text{ cm}^2$$