

Aufgabe 12.142

Wie sind die Ausmaße einer zylindrischen Konservendose zu wählen, damit sie einen Inhalt von 1 Liter hat und zu ihrer Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Dose (ohne Verschnitt)?

Lösung:

$$V = \pi r^2 h = 1 \text{ [dm}^3\text{]}, \quad h = \frac{1}{\pi r^2}, \quad O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} \rightarrow \min,$$

$$O' = 4\pi r - \frac{2}{r^2} \begin{cases} < 0 & r < \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} & \text{monoton fallend} \\ = 0 & r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} & \text{Minimum} \\ > 0 & r > \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} & \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

minimaler Materialverbrauch bei $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 0,5419 \text{ dm}$, $h \approx \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = 2r \approx 1,0838 \text{ dm}$,

Materialverbrauch dabei $O = 6\pi r^2 \approx 5,54 \text{ dm}^2$