Aufgabe 12.141

Betrachtet werden Quader mit den Kantenlängen a, b und c, deren Volumen $1\,\mathrm{m}^3$ beträgt und bei denen die Kanten a und b im Verhältnis $1 : 3$ stehen. Wie müssen die Kantenlängen gewählt werden, damit der Oberflächeninhalt minimal wird? Wie groß ist die minimale Oberfläche?

Lösung:

$b = 3a,\ \ V = abc = 1,\ \ c = \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{3a^2}$ (alle Längen in m)

Oberfläche: $A = 2ab + 2ac + 2bc = 6a^2 + 8ac = 6a^2 + \dfrac{8a}{3a^2} = 6a^2 + \dfrac{8}{3a}$

$A'(a) = 12a - \dfrac{8}{3a^2} = 0,\ \ 12a = \dfrac{8}{3a^2},\ \ 36a^3 = 8,\ \ a^3 = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9},\ \ a = \sqrt[3]{\dfrac{2}{9}} \approx 0.6057$

$$A''(a) = 12 + \frac{16}{3a^3} > 0 \implies \text{Minimum bei } a = \sqrt[3]{\frac{2}{9}} \approx 0.6057\,\mathrm{m},$$

$$b = 3\sqrt[3]{\frac{2}{9}} = \sqrt[3]{2\cdot 279} = \sqrt[3]{6} \approx 1.8171\,\mathrm{m},$$

$$c = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{81}{4\cdot 27}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \approx 0.9086\,\mathrm{m}$$

minimale Oberfläche $A\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}\right) = 6\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}\right)^2 + \dfrac{8}{3\sqrt[3]{\frac{2}{9}}} \approx 6.604\,\mathrm{m}^2$