Aufgabe 12.134

Die über einem Teil der reellen Achse definierte Funktion

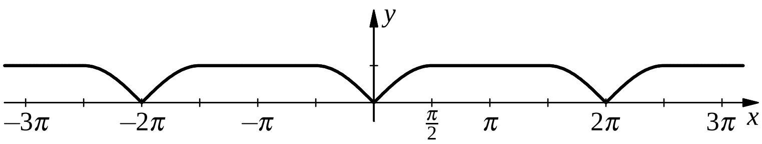
$$f(x)=\begin{cases}\sin|x| & 0\le|x|\le\frac{\pi}{2}\\ 1 & \frac{\pi}{2}<|x|\le\pi\end{cases}$$

werde so auf die komplette reelle Achse fortgesetzt, dass eine Funktion mit der Periodenlänge 2π entsteht. Diskutieren und skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion!

Lösung:

Definitionsbereich $\mathbb{R}$

Wegen $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}-0} f(x)=1=\sin\frac{\pi}{2}=f(-\frac{\pi}{2})$, $\lim\limits_{x\to0-0} f(x)=0=\sin 0=f(0)=\lim\limits_{x\to0+0} f(x)$ und $f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)$ ist die gegebene Funktion, wegen $f(\pi)=1=f(-\pi)$ auch ihre periodische Fortsetzung überall stetig.



Nullstellen: $x=2k\pi$, k ganz

Wegen $\left.\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}=0=\left.\frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$ und $\left.\frac{\mathrm{d}\sin(-x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}=0=\left.\frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\frac{\pi}{2}}$ (d.h. linksseitige und rechtsseitige Ableitung sind gleich) ist die Funktion für $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k ganz) differenzierbar, ebenso offensichtlich für $x=(2k+1)\pi$ (Funktion von beiden Seiten konstant 1). Wegen $\left.\frac{\mathrm{d}\sin(-x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-\cos 0=-1$ und $\left.\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\cos 0=1$ ist die Funktion hingegen für $x=2k\pi$ (k ganz) nicht differenzierbar. Somit gilt

$$f'(x)\begin{cases}=0 & -\pi+2k\pi\le x\le-\frac{\pi}{2}+2k\pi & \text{konstant, Maximum } f(x)=1\\ =-\cos(-x)<0 & -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<0+2k\pi & \text{monoton fallend}\\ \text{nicht def.} & x=2k\pi & \text{Minimum } f(2k\pi)=0\\ =\cos x>0 & 0+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi & \text{monoton wachsend}\\ =0 & \frac{\pi}{2}+2k\pi\le x\le\pi+2k\pi & \text{konstant, Maximum } f(x)=1\end{cases}$$

Also liegen für $x=2k\pi$ Minima ($f(x)=0$) und für $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ Maxima ($f(x)=1$) vor, dies ergibt sich auch unmittelbar aus dem Bild der Funktion.

Die zweite Ableitung existiert wegen $\left.\frac{\mathrm{d}^2\sin x}{\mathrm{d}^2x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$ und $\left.\frac{\mathrm{d}^2 1}{\mathrm{d}^2x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$ sowie $\left.\frac{\mathrm{d}^2\sin(-x)}{\mathrm{d}^2x}\right|_{x=-\frac{\pi}{2}}=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$ und $\left.\frac{\mathrm{d}^2 1}{\mathrm{d}^2x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$ zusätzlich auch für $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k ganz) nicht. Es gilt

$$f''(x)\begin{cases} =0 & -\pi+2k\pi \le x < -\frac{\pi}{2}+2k\pi & \\ \text{nicht. def.} & x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi & \\ =-\sin(-x)<0 & -\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < 0+2k\pi & \text{konkav} \\ \text{nicht def.} & x=2k\pi & \\ =-\sin x<0 & 0+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi & \text{konkav} \\ \text{nicht. def.} & x=\frac{\pi}{2}+2k\pi & \\ =0 & \frac{\pi}{2}+2k\pi < x \le \pi+2k\pi & \end{cases}$$

Das Bild der Funktion zeigt, dass diese innerhalb jedes Intervalls $0+2k\pi \le x \le 2\pi+2k\pi$ konkav ist, da alle Sekanten unterhalb des Graphen bzw. auf dem Graphen der Funktion liegen. Wendepunkte existieren nicht.