Aufgabe 12.133

Die vertikale Bewegung eines Körpers werde durch seine Höhe h gegenüber einer Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben: $h(t)=(t^3-2t^2-3t)\mathrm{e}^{-t}$. Diskutieren Sie die Funktion und gehen Sie insbesondere auf folgende Fragen ein:

(A) Wann befindet sich der Körper an der Wasseroberfläche?
(B) Wie groß ist seine höchste Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$?
(C) Wie tief taucht er im Zeitintervall $[0,\infty)$ maximal ein?
(D) Wann steigt und wann fällt die Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$ am schnellsten?
(E) Skizzieren Sie die Funktion!

Lösung:

Ohne Ableitung festzustellende Eigenschaften
(Definitionsbereich, Stetigkeit, asymptotisches Verhalten, Achsenschnittpunkte):

definiert und stetig über $\mathbb{R}$

Nullstellen: $(t^3-2t^2-3t)\mathrm{e}^{-t}=t(t^2-2t-3)\mathrm{e}^{-t}=0$ für $t_1=0,\ t_{2/3}=1\pm\sqrt{1+3}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

Schnitt mit der vertikalen Achse (Zeitpunkt $t=0$): für $h(0)=0$

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{t\to-\infty}h(t)=-\infty\cdot\infty=-\infty$,

$$\lim_{t\to\infty}h(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3-2t^2-3t}{\mathrm{e}^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2-4t-3}{\mathrm{e}^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{6t-4}{\mathrm{e}^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{6}{\mathrm{e}^t}=0$$

Mit 1. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Monotonie, Extremwerte):

$\dot{h}(t)=(3t^2-4t-3)\mathrm{e}^{-t}-(t^3-2t^2-3t)\mathrm{e}^{-t}=-(t^3-5t^2+t+3)\mathrm{e}^{-t}=0$ offensichtlich für $t_1=1$,

$(t^3-5t^2+t+3):(t-1)=t^2-4t+3,\quad t_{2/3}=2\pm\sqrt{4+3}=\begin{cases}2+\sqrt{7}\approx\ \ 4{,}6458\\2-\sqrt{7}\approx-0{,}6458\end{cases}$

$$\begin{array}{l}
\underline{t^3-\ t^2}\\
\quad -4t^2+\ t+3\\
\quad \underline{-4t^2+4t}\\
\qquad\qquad -3t+3\\
\qquad\qquad \underline{-3t+3}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\dot{h}(t)=-\big(t-(2-\sqrt{7})\big)\big(t-1\big)\big(t-(2+\sqrt{7})\big)\mathrm{e}^{-t}$

$$\dot{h}(t)\begin{cases}
>0 & t<2-\sqrt{7} & \text{monoton wachsend} & \\
=0 & t=2-\sqrt{7} & & \text{lokales Maximum } h(2-\sqrt{7})\approx 1{,}5908\\
<0 & 2-\sqrt{7}<t<1 & \text{monoton fallend} & \\
=0 & t=1 & & \text{lokales Minimum } h(1)\approx-1{,}4715\\
>0 & 1<t<2+\sqrt{7} & \text{monoton wachsend} & \\
=0 & t=2+\sqrt{7} & & \text{lokales Maximum } h(2+\sqrt{7})\approx 0{,}4145\\
<0 & t>2+\sqrt{7} & \text{monoton fallend} &
\end{cases}$$

Wertebereich $(-\infty,h(2-\sqrt{7})]$

Mit 2. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Krümmung, Wendepunkte):

$\ddot{h}(t)=(-3t^2+10t-1)\mathrm{e}^{-t}+(t^3-5t^2+t+3)\mathrm{e}^{-t}=(t^3-8t^2+11t+2)\mathrm{e}^{-t}=0$ offensichtlich für $t_1=2$,

$$\begin{array}{l} (\,t^3-8t^2+11t+2\,):(t-2)=t^2-6t-1, \quad t_{2/3}=3\pm\sqrt{9+1}=\begin{cases}3+\sqrt{10}\approx 6{,}1623\\ 3-\sqrt{10}\approx -0{,}1623\end{cases}\\ \underline{\;t^3-2t^2\qquad\qquad\;}\\ \qquad -6t^2+11t+2\\ \qquad \underline{-6t^2+12t\qquad}\\ \qquad\qquad\qquad -t+2\\ \qquad\qquad\qquad \underline{-t+2}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\ddot{h}(t)=\big(t-(3-\sqrt{10})\big)\big(t-2\big)\big(t-(3+\sqrt{10})\big)\mathrm{e}^{-t}$$

$$\ddot{h}(t)\begin{cases} <0 & t<3-\sqrt{10} & \text{konkav} & \\ =0 & t=3-\sqrt{10} & & \text{Wendepunkt } h(3-\sqrt{10})\approx 0{,}5056\\ >0 & 3-\sqrt{10}<t<2 & \text{konvex} & \\ =0 & t=2 & & \text{Wendepunkt } h(2)\approx -0{,}8120\\ <0 & 2<t<3+\sqrt{10} & \text{konkav} & \\ =0 & t=3+\sqrt{10} & & \text{Wendepunkt } h(3+\sqrt{10})\approx 0{,}2941\\ >0 & t>3+\sqrt{10} & \text{konvex} & \end{cases}$$

(A) Der Körper befindet sich zu den Zeitpunkten -1, 0 und 3 an der Wasseroberfläche.

(B) Die größte Höhe von ca. 0,4145 wird zum Zeitpunkt $t=2+\sqrt{7}\approx 4{,}6458$ erreicht.

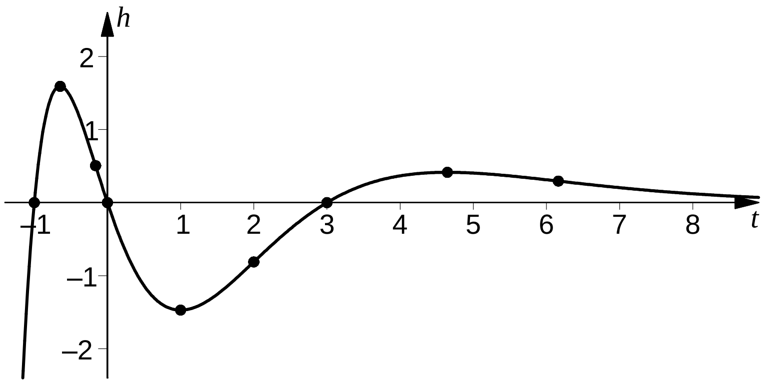
(C) Die größte Tauchtiefe von ca. $-1{,}4715$ wird zum Zeitpunkt $t=1$ erreicht.

(D) Die schnellste Höhenänderung kann nur in Randpunkten des Intervalls oder in Wendepunkten vorliegen. In Letzteren ist nämlich die Ableitung der Geschwindigkeit $\dot{h}(t)$ gleich 0 und wechselt das Vorzeichen.

Da der Körper im Intervall $[0\,,\infty)$ nur in einem im Inneren liegenden Bereich steigt, steigt er bei Erreichen des Wendepunktes zum Zweitpunkt $t=2$ am schnellsten auf.

An den Rändern des Intervalls fällt der Körper, dabei ist $\dot{h}(0)=-3$ und $\dot{h}(\infty)=0$. In dem im Intervall $[0\,,\infty)$ liegenden Wendepunkt $3+\sqrt{10}\approx 6{,}1623$ beträgt die Geschwindigkeit dagegen $\dot{h}(3+\sqrt{10})\approx -0,1123$, so dass die Höhe für $t=0$ am schnellsten fällt.

(E)



t		$h(t)$	$\dot{h}(t)$	$\ddot{h}(t)$
-1	-1	**0**	10,8731	$-48{,}9291$
$2-\sqrt{7}$	$-0{,}6458$	1,5908	**0**	$-16{,}6108$
$3-\sqrt{10}$	$-0{,}1623$	0,5056	$-$ 3,1778	**0**
0	0	**0**	$-$ 3	2
1	1	$-1{,}4715$	**0**	2,2073
2	2	$-0{,}8120$	0,9473	**0**
3	3	**0**	0,5974	$-$ 0,4979
$2+\sqrt{7}$	4,6458	0,4145	**0**	$-$ 0,1852
$3+\sqrt{10}$	6,1623	0,2941	$-$ 0,1123	**0**