Aufgabe 12.130

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ und skizzieren Sie sie!

Lösung:

Ohne Ableitung festzustellende Eigenschaften
(Definitionsbereich, Stetigkeit, Achsenschnittpunkte):

$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x=\sin x\cos x+\cos x=\cos x(\sin x+1)$: definiert und stetig für $x\in\mathbb{R}$, beschränkt, deshalb ergibt sich Wertebereich aus Extrema

Nullstellen: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, k beliebig ganz, Schnitt mit y-Achse in $f(0)=1$

Mit 1. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Monotonie, Extremwerte):

$f'(x)=\cos 2x-\sin x=1-2\sin^2 x-\sin x=-2(\sin x-\frac{1}{2})(\sin x+1)=0$ für $\sin x=\frac{1}{2},-1,$

Ableitung hat Nullstellen in $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,$ k beliebig ganz

$$f'(x)\begin{cases} >0 & -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{monoton wachsend} \\ =0 & x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \qquad \text{Lok. Maximum bei } y=\frac{3}{4}\sqrt{3} \\ <0 & \frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad \text{monoton fallend} \\ =0 & x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \qquad \text{Lok. Minimum bei } y=-\frac{3}{4}\sqrt{3} \\ >0 & \frac{5\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi \quad \text{monoton wachsend} \\ =0 & x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \qquad \text{kein Extremwert (s. Fortsetzung oben: mon. wachs.)} \end{cases}$$

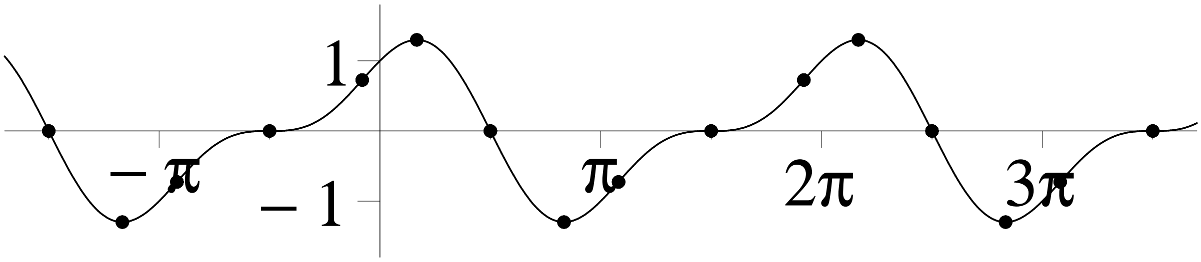
Wertebereich: $-\frac{3}{4}\sqrt{3}\le y\le\frac{3}{4}\sqrt{3}$

Mit 2. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Krümmung, Wendepunkte):

$f''(x)=-2\sin 2x-\cos x=-\cos x(1+4\sin x)=0$ für $\cos x=0$ und $\sin x=-\frac{1}{4},$

d.h. für $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\arcsin\frac{1}{4}+(2k+1)\pi\approx\frac{13\pi}{12}+2k\pi,\ x=-\arcsin\frac{1}{4}+(2k+2)\pi\approx\frac{23\pi}{12}+2k\pi$

$$f''(x)\begin{cases} <0 & -\arcsin\frac{1}{4}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{konkav} \\ =0 & x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad \text{Wendepunkt bei } y=0 \\ >0 & \frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\arcsin\frac{1}{4}+(2k+1)\pi \quad \text{konvex} \\ =0 & x=\arcsin\frac{1}{4}+(2k+1)\pi\approx\frac{13\pi}{12}+2k\pi \qquad \text{Wendepunkt bei } y=-\frac{3}{16}\sqrt{15} \\ <0 & \arcsin\frac{1}{4}+(2k+1)\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi \quad \text{konkav} \\ =0 & x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \qquad \text{Wendepunkt bei } y=0 \\ >0 & \frac{3\pi}{2}+2k\pi<x<\arcsin\frac{1}{4}+(2k+2)\pi \quad \text{konvex} \\ =0 & x=-\arcsin\frac{1}{4}+(2k+2)\pi\approx\frac{23\pi}{12}+2k\pi \qquad \text{Wendepunkt bei } y=\frac{3}{16}\sqrt{15} \end{cases}$$


1
−1
−π
π
2π
3π