Aufgabe 12.129

a sei ein positiver Parameter. Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = \dfrac{|a+2x|}{x}$!

Lösung:

$\mathrm{DB}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, stetig über $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f(x) = \frac{|x|\,\left|\frac{a}{x}+2\right|}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm 2, \quad f(x) \xrightarrow[x\to 0\pm 0]{} \pm\infty \text{ (da } a>0\text{; Pol 1. Ordn. für } x=0)$$

$$f(x) = 0 \iff a+2x=0 \iff x = -\frac{a}{2}\text{: Nullstelle}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-a-2x}{x} = -2-\dfrac{a}{x}, & x<-\dfrac{a}{2}: \quad \text{streng monoton wachsend für } x<-\dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a+2x}{x} = 2+\dfrac{a}{x}, & x\geq -\dfrac{a}{2},\ x\neq 0: \quad \text{streng monoton fallend für } x>-\dfrac{a}{2},\ x\neq 0 \end{cases}$$

Die Monotonieeigenschaften können auch mit Hilfe der Ableitung ermittelt werden:

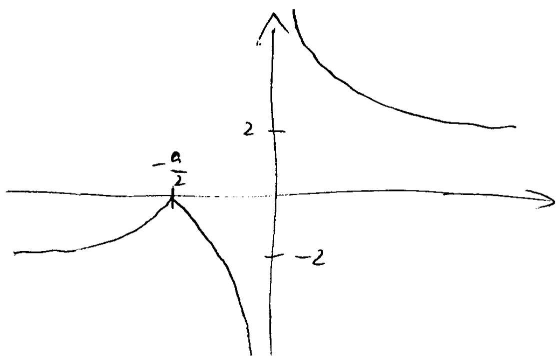
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2} > 0, & x < -\dfrac{a}{2}: \quad \text{streng monoton wachsend} \\ -\dfrac{a}{x^2} < 0, & x > -\dfrac{a}{2},\ x\neq 0: \quad \text{streng monoton fallend} \end{cases}$$

Extremwerte können also nur für $x=-\frac{a}{2}$ und $x=0$ vorliegen. Das sind die einzigen Punkte, in denen die Funktion nicht streng monoton ist. Für $x=0$ ist $f(x)$ nicht definiert (Polstelle), so dass kein Extremwert vorliegt. Für $x=-\frac{a}{2}$ gilt aber $f\left(-\frac{a}{2}\right)=0$ und $f(x)<0$ in der Umgebung, so dass $f\left(-\frac{a}{2}\right)=0$ das einzige lokale Maximum ist. Globale Extrema existieren wegen des Pols ungerader Ordnung nicht.

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2a}{x^3} > 0, & x<-\dfrac{a}{2}: \quad \text{konvex} \\ \dfrac{2a}{x^3} < 0, & -\dfrac{a}{2}<x<0: \quad \text{konkav} \\ \dfrac{2a}{x^3} > 0, & 0<x: \quad \text{konvex} \end{cases}$$

Analog zu der Situation bei den Extremwerten ist $f\left(-\frac{a}{2}\right)=0$ also auch einziger Wendepunkt.

Skizze:



Wertebereich: $\mathrm{WB}(f) = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$