Aufgabe 12.127

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=(x^3-4x^2+7x-6)\,\mathrm{e}^x$ und skizzieren Sie sie! Als Hilfestellung zur Bestimmung der Nullstellen sowie zur abschließenden Anfertigung der Skizze ohne elektronische Hilfsmittel sind nebenstehend einige Funktionswerte angegeben.

x	$f(x)$
-3	$-4{,}4808$
-2	$-5{,}9548$
-1	$-6{,}6218$
0	-6
1	$-5{,}4366$
2	0

Lösung:

Ohne Ableitung festzustellende Eigenschaften
(Definitionsbereich, Stetigkeit, asymptotisches Verhalten, Achsenschnittpunkte):

definiert und stetig über $\mathbb{R}$

Nullstellen: $x_1=2$, $(x^3-4x^2+7x-6):(x-2)=x^2-2x+3$, $x_{2/3}=1\pm\sqrt{1-4}$ nicht reell, also $x^2-2x+3>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{r}
x^3-2x^2 \\ \hline
-2x^2+7x-6 \\
-2x^2+4x \\ \hline
3x-6 \\
3x-6 \\ \hline
0
\end{array}$$

$x=2$ ist einzige Nullstelle von $f(x)=(x^3-4x^2+7x-6)\mathrm{e}^x=(x-2)(x^2-2x+3)\mathrm{e}^x$.

Schnitt mit der vertikalen Achse im Punkt $(0,f(0))=(0,6)$

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\cdot\infty=\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x^2+7x-6}{\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-8x+7}{-\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-8}{\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{-\mathrm{e}^{-x}}=0$$

Mit 1. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Monotonie, Extremwerte):

$$\begin{aligned}
f'(x)&=(3x^2-8x+7)\mathrm{e}^x+(x^3-4x^2+7x-6)\mathrm{e}^x=(x^3-x^2-x+1)\mathrm{e}^x=(x-1)(x^2-1)\mathrm{e}^x\\
&=(x-1)(x-1)(x+1)\mathrm{e}^x=(x-1)^2(x+1)\mathrm{e}^x=0 \text{ offensichtlich für } x_{1/2}=1,\ x_3=-1
\end{aligned}$$

$$f'(x)\begin{cases}
<0 & x<-1 & \text{monoton fallend} & \\
=0 & x=-1 & & \text{lokales Minimum } f(-1)\approx-6{,}6218\\
>0 & -1<x<1 & \text{monoton wachsend} & \\
=0 & x=1 & & \text{kein Extremwert bei } f(1)\approx-5{,}4366\\
>0 & x>1 & \text{monoton wachsend} &
\end{cases}$$

Wertebereich $[f(-1)\,,\infty)$

Mit 2. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Krümmung, Wendepunkte):

$$f''(x)=(3x^2-2x-1)\mathrm{e}^x+(x^3-x^2-x+1)\mathrm{e}^x=(x^3+2x^2-3x)\mathrm{e}^x=x(x^2+2x-3)\mathrm{e}^x=0$$
$$\text{für } x_1=0,\ x_{2/3}=-1\pm\sqrt{1+3}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$$

$$f''(x)=(x+3)\,x\,(x-1)\,\mathrm{e}^x$$

$$f''(x)\begin{cases} <0 & x<-3 & \text{konkav} & \\ =0 & x=-3 & & \text{Wendepunkt } f(-3)\approx -4{,}4808 \\ >0 & -3<x<0 & \text{konvex} & \\ =0 & x=0 & & \text{Wendepunkt } f(0)=-6 \\ <0 & 0<x<1 & \text{konkav} & \\ =0 & x=1 & & \text{Wendepunkt } f(1)\approx -5{,}4366 \\ >0 & x>1 & \text{konvex} & \end{cases}$$