Aufgabe 12.124

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$ und skizzieren Sie sie!

Lösung:

Ohne Ableitung festzustellende Eigenschaften
(Definitionsbereich, Stetigkeit, asymptotisches Verhalten, Achsenschnittpunkte):

$f(x)=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}=\frac{3x^2-1}{x^3}$: definiert und stetig für $x\neq 0$,

Nullstellen: $3x^2-1=0 \implies x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\frac{3x^2-1}{x^3}=\mp\infty$ (Pol 1. Ordnung bei $x=0$),

damit sind sowohl die x- als auch die y-Achse Asymptoten.

Mit 1. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Monotonie, Extremwerte):

$$f'(x)=-3x^{-2}+3x^{-4}=3\frac{1-x^2}{x^4}=\begin{cases}<0 & x<-1 & \text{monoton fallend}\\ =0 & x=-1 & \quad\text{Lok. Minimum } f(-1)=-2\\ >0 & -1<x<0 & \text{monoton wachsend}\\ >0 & 0<x<1 & \text{monoton wachsend}\\ =0 & x=1 & \quad\text{Lok. Maximum } f(1)=2\\ <0 & 1<x & \text{monoton fallend}\end{cases}$$

Wertebereich ist folglich die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Globale Extrema gibt es nicht.

Mit 2. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Krümmung, Wendepunkte):

$$f''(x)=6x^{-3}-12x^{-5}=6\frac{x^2-2}{x^5}\begin{cases}<0 & x<-\sqrt{2} & \text{konkav}\\ =0 & x=-\sqrt{2} & \quad\text{WP } f(-\sqrt{2})=-\frac{5}{2\sqrt{2}}\\ >0 & -\sqrt{2}<x<0 & \text{konvex}\\ <0 & 0<x<\sqrt{2} & \text{konkav}\\ =0 & x=\sqrt{2} & \quad\text{WP } f(\sqrt{2})=\frac{5}{2\sqrt{2}}\approx 1.7677\\ >0 & \sqrt{2}<x & \text{konvex}\end{cases}$$