Aufgabe 12.123

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-1}$ und skizzieren Sie sie!

Lösung:

Ohne Ableitung festzustellende Eigenschaften
(Definitionsbereich, Stetigkeit, asymptotisches Verhalten, Achsenschnittpunkte):

$x^2+x-6=0$ für $x=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{24}{4}}=\begin{cases}2\\-3\end{cases}$. Also gilt $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-1}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+1)}$.

$\mathrm{DB}(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, stetig auch für $x\neq\pm1$

asymptotisch: $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=1$,

Pole 1. Ordnung für $x=\pm1$ und zwar $\lim\limits_{x\to-1\mp0} f(x)=\mp\infty$, $\lim\limits_{x\to1\mp0} f(x)=\pm\infty$

Nullstellen: $f(x)=0$ für $x=-3$ und $x=2$, Schnitt mit y-Achse für $y=6$

Mit 1. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Monotonie, Extremwerte):

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2-1)-2x(x^2+x-6)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x+x^2-1-2x^3-2x^2+12x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2+10x-1}{(x^2-1)^2}$$

$$x^2-10x+1=0 \quad\text{für}\quad x=5\pm\sqrt{24}\approx\begin{cases}0{,}1010205\\9{,}8989795\end{cases}\qquad \begin{array}{l}f(5-\sqrt{24})\approx5{,}9494894\\ f(5+\sqrt{24})\approx1{,}0505102\end{array}$$

In $\dfrac{-x^2+10x-1}{(x^2-1)^2}$ ist der Zähler eine nach unten offene Parabel mit den beiden angegebenen Nullstellen, der Nenner ist nie negativ, somit gilt

$$f'(x)=\begin{cases}<0, & x<5-\sqrt{24},\,x\neq-1 & \text{mon. fallend} & \\ =0, & x=5-\sqrt{24} & & \Rightarrow\ \text{lok. Minimum } f(5-\sqrt{24})\\ >0, & 5-\sqrt{24}<x<5+\sqrt{24},\,x\neq1 & \text{mon. wachsend} & \\ =0, & x=5+\sqrt{24} & & \Rightarrow\ \text{lok. Maximum } f(5+\sqrt{24})\\ >0, & x>5+\sqrt{24} & \text{mon. fallend} & \end{cases}$$

Aufgrund des asymptotischen Verhaltens hat die Funktion keine globalen Extrema.

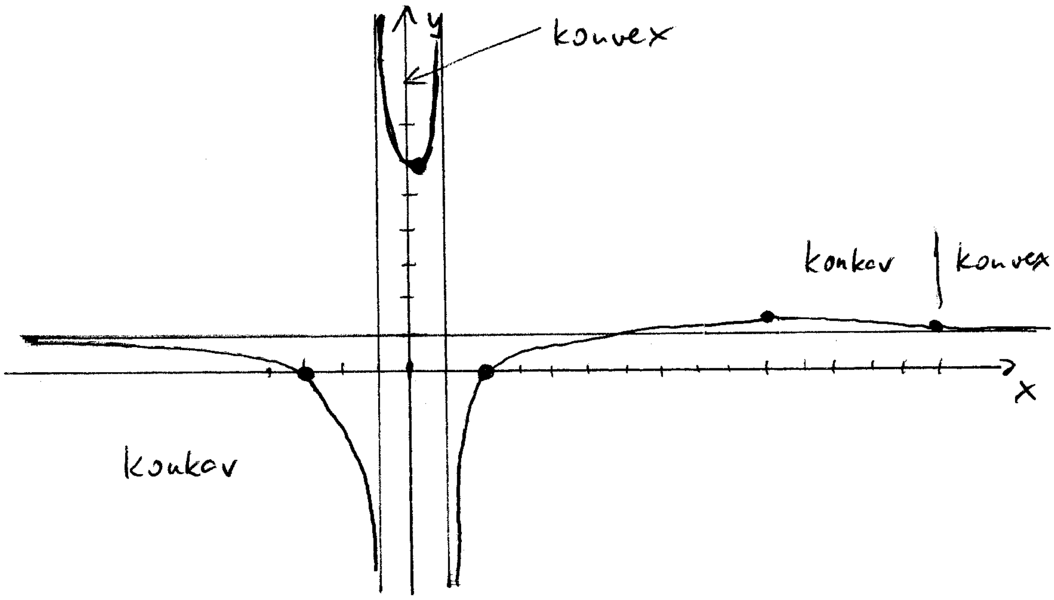
Mit 2. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Krümmung, Wendepunkte):

$$f''(x)=\frac{(-2x+10)(x^2-1)^2-(-x^2+10x-1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\frac{(-2x+10)(x^2-1)+4x(-x^2+10x-1)}{(x^2-1)^3}$$

$$=\frac{-2x^3+10x^2+2x-10+4x^3-40x^2+4x}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3-30x^2+6x-10}{(x^2-1)^3}$$

Der Zähler hat eine einzige Nullstelle, diese liegt bei $x\approx14{,}82033976$, links davon ist er negativ, rechts davon positiv. Der Nenner wechselt bei $x=\pm1$ jeweils das Vorzeichen. Insgesamt gilt

$$f''(x)=\begin{cases}<0, & x<-1 & \text{konkav} & \\ >0, & -1<x<1 & \text{konvex} & \\ <0, & 1<x\underset{\approx}{<}14{,}82 & \text{konkav} & \\ =0, & x\approx14{,}82 & & \Rightarrow\ \text{Wendepunkt } f(14{,}82033976)\approx1{,}0449151\\ >0, & x\underset{\approx}{>}14{,}82 & \text{konvex} & \end{cases}$$



$\mathrm{WB}(f) = (-\infty, 1{,}0505102] \cup [5{,}9494894, \infty)$, dabei sind die beiden Dezimalbrüche nur gerundete Werte für die Grenzen.