Aufgabe 12.122

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$ und skizzieren Sie sie!

Lösung:

Ohne Ableitung festzustellende Eigenschaften
(Definitionsbereich, Stetigkeit, asymptotisches Verhalten, Achsenschnittpunkte):

$f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}=\dfrac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)}$: definiert und stetig für $x\neq 1$

Nullstelle: $x=0$, Schnitt mit y-Achse auch im Koordinatenursprung

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, Asymptote dabei $y=x$, da $f(x)=\dfrac{x}{1-\frac{1}{x^3}}$

$\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=\pm\infty$ (Pol 1. Ordnung bei $x=1$)

Mit 1. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Monotonie, Extremwerte):

$$f'(x)=\frac{x^6-4x^3}{(x^3-1)^2}=\frac{x^3}{(x^3-1)^2}(x^3-4)\begin{cases} >0 & x<0 & \text{monoton wachsend} \\ =0 & x=0 & \quad\text{Lok. Max. } f(0)=0 \\ <0 & 0<x<1 & \text{monoton fallend} \\ \text{n. def.} & x=1 & \\ <0 & 1<x<\sqrt[3]{4} & \text{monoton fallend} \\ =0 & x=\sqrt[3]{4}\approx 1.5874 & \quad\text{Lok. Min. } f(\sqrt[3]{4})\approx 2.1165 \\ >0 & \sqrt[3]{4}<x & \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

Wertebereich: $y\leq 0$ und $y\geq \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{4}$

Mit 2. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Krümmung, Wendepunkte):

$$f''(x)=\frac{6x^2}{(x^3-1)^3}(x^3+2)\begin{cases} >0 & x<-\sqrt[3]{2} & \text{konvex} \\ =0 & x=-\sqrt[3]{2}\approx -1.2599 & \quad\text{WP } f(\sqrt[3]{2})\approx -0.8399 \\ <0 & -\sqrt[3]{2}<x<0 & \text{konkav} \\ =0 & x=0 & \quad\text{kein Wendepunkt} \\ <0 & 0<x<1 & \text{konkav} \\ \text{n. def.} & x=1 & \\ >0 & 1<x & \text{konvex} \end{cases}$$