Aufgabe 12.121

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}$ und skizzieren Sie sie!

Lösung:

Ohne Ableitung festzustellende Eigenschaften
(Definitionsbereich, Stetigkeit, asymptotisches Verhalten, Achsenschnittpunkte):

$f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$: definiert und stetig für $x \neq 2$

Nullstelle: $x=-2$ (doppelt), Schnitt mit y-Achse ($x=0$) für $y=1$

Asymptoten: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x)=\infty$

Mit 1. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Monotonie, Extremwerte):

$$f'(x)=-8\frac{x+2}{(x-2)^3}\left\{\begin{array}{lll} <0 & x<-2 & \text{monoton fallend} \\ =0 & x=-2 & \quad\text{Lok. Minimum } f(-2)=0 \\ >0 & -2<x<2 & \text{monoton wachsend} \\ \text{n.def.} & x=2 & \quad\text{Pol 2. Ordnung bei } x=2 \\ <0 & x>2 & \text{monoton fallend} \end{array}\right.$$

Wertebereich $y \geq 0$

Mit 2. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Krümmung, Wendepunkte):

$$f''(x)=16\frac{x+4}{(x-2)^4}\left\{\begin{array}{lll} <0 & x<-4 & \text{konkav} \\ =0 & x=-4 & \quad\text{Wendepunkt } f(-4)=\dfrac{1}{9} \\ >0 & -4<x<2 & \text{konvex} \\ \text{n.def.} & x=2 & \\ >0 & x>2 & \text{konvex} \end{array}\right.$$