Aufgabe 12.119

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3}{10(x-2)}$, $x \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie sie!

Lösung:

Ohne Ableitung festzustellende Eigenschaften
(Definitionsbereich, Stetigkeit, asymptotisches Verhalten, Achsenschnittpunkte):

definiert und stetig für $x \neq 2$

Nullstelle: $x=0$, Schnitt mit y-Achse ($x=0$) für $y=f(0)=0$

asymptotisches Verhalten: $f(x) \approx \dfrac{x^2}{10} \longrightarrow \infty$ für $x \to \pm\infty$,

Pol 1. Ordnung für $x=2$: $f(x) \longrightarrow \pm\infty$ für $x \to 2\pm 0$

Mit 1. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Monotonie, Extremwerte):

$$f'(x) = \frac{1}{10}\,\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \frac{1}{10}\,\frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2} = \frac{1}{5}\,\frac{x^3-3x^2}{(x-2)^2} = \frac{1}{5}\,\frac{x^2(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \text{ für } x=0 \text{ und } x=3$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}\,\frac{x^2(x-3)}{(x-2)^2} \begin{cases} <0 & x<0 & \text{monoton fallend} & \\ =0 & x=0 & & \text{kein Extremum} \\ <0 & 0<x<2 & \text{monoton fallend} & \\ \text{n. def.} & x=2 & & \text{Pol 1. Ordnung bei } x=2 \\ <0 & 2<x<3 & \text{monoton fallend} & \\ =0 & x=3 & & \text{lokales Minimum } f(3)=2{,}7 \\ >0 & x>3 & \text{monoton wachsend} & \end{cases}$$

Wertebereich $\mathbb{R}$

Mit 2. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Krümmung, Wendepunkte):

$$f''(x) = \frac{1}{5}\,\frac{(3x^2-6x)(x-2)^2-2(x-2)(x^3-3x^2)}{(x-2)^4} = \frac{1}{5}\,\frac{(3x^2-6x)(x-2)-2(x^3-3x^2)}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{3x^3-6x^2-6x^2+12x-2x^3+6x^2}{(x-2)^3} = \frac{1}{5}\,\frac{x^3-6x^2+12x}{(x-2)^3} = \frac{1}{5}\,\frac{x(x^2-6x+12)}{(x-2)^3}$$

$$=0 \text{ für } x_1=0,\ x_{2/3}=3\pm\sqrt{9-12} \implies x^2-6x+12>0 \text{ für alle } x$$

$$f''(x) = \frac{1}{5}\,\frac{x(x^2-6x+12)}{(x-2)^3} \begin{cases} >0 & x<0 & \text{konvex} & \\ =0 & x=0 & & \text{Wendepunkt } f(0)=0 \\ <0 & 0<x<2 & \text{konkav} & \\ \text{n. def.} & x=2 & & \text{Pol 1. Ordnung bei } x=2 \\ >0 & x>2 & \text{konvex} & \end{cases}$$