Aufgabe 12.118

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{48-2x},\, x\in\mathbb{R}$ und skizzieren Sie sie!

Lösung:

Eigenschaften, die ohne Ableitung zu ermitteln sind:

Definitionsbereich: Es muss $x\geq 0$ und $48-2x\geq 0$ sein, also Definitionsbereich $[0,24]$.

Stetigkeit: Wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion ist $f(x)$ über dem gesamten Definitonsbereich stetig.

Nullstellen: $\sqrt{x}-\sqrt{48-2x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{48-2x} \Rightarrow x=48-2x \Rightarrow 3x=48 \Rightarrow x=16$

Schnitt mit der y-Achse: $f(0)=\sqrt{0}-\sqrt{48-2\cdot 0}=-\sqrt{48}\approx -6.9282$

keine Polstellen (offensichtlich ist die Funktion über dem Definitionsbereich beschränkt)

Eigenschaften mit 1. Ableitung (Monotonie, Extremwerte):

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{48-2x}}$$

Offensichtlich gilt über dem gesamten Definitionsbereich $f'(x)>0$, die Funktion ist also überall streng monoton wachsend und hat im Inneren des Definitionsbereichs keine Extrema.

Wegen der strengen Monotonie gilt $f(0)<f(x)<f(48)$ für alle $0<x<24$. $\Longrightarrow$
globales Minimum: $f(0)=-\sqrt{48}\approx -6.9282$, globales Maximum $f(24)=\sqrt{24}\approx 4.8990$,
Wertebereich $[-\sqrt{48},\sqrt{24}]$

Eigenschaften mit 2. Ableitung (Krümmung, Wendepunkte):

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}-2(-\frac{1}{2})(48-2x)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}+(48-2x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=(48-2x)^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 48-2x=4^{\frac{2}{3}}x \Leftrightarrow x=\frac{48}{2+\sqrt[3]{16}}\approx 10.6198$$

Da sowohl $\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ als auch $(48-2x)^{-\frac{3}{2}}$ monoton wachsend sind, folgt

$$f''(x)\begin{cases} <0,\ x<\frac{48}{2+\sqrt[3]{16}} & \text{konkav} \\ =0,\ x=\frac{48}{2+\sqrt[3]{16}}\approx 10.6198 & \Rightarrow \text{Wendepunkt } (10.6198,-1.9142) \\ >0,\ x>\frac{48}{2+\sqrt[3]{16}} & \text{konvex} \end{cases}$$