Aufgabe 12.116

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=x^3(x-3)$ und skizzieren Sie sie!

Lösung:

Ohne Ableitung festzustellende Eigenschaften
(Definitionsbereich, Stetigkeit, asymptotisches Verhalten, Achsenschnittpunkte):

$\mathrm{DB}(f)=\mathbb{R}$, stetig über $\mathbb{R}$

asymptotisch: $f(-\infty)=f(\infty)=\infty$

Nullstellen: $f(x)=0$ für $x=0$ und $x=3$, Schnitt mit y-Achse auch im Koordinatenursprung

Mit 1. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Monotonie, Extremwerte):

$f'(x)=3x^2(x-3)+x^3=4x^3-9x^2=x^2(4x-9)$, $\quad f'(x)=0$ für $x=0$ und $x=\dfrac{9}{4}$

$$f'(x)=\begin{cases} <0, & x<0 \quad \text{monoton fallend} \\ =0, & x=0 \quad\quad\quad\quad\quad \Rightarrow \text{ kein Extremwert} \\ >0, & 0<x<\frac{9}{4} \quad \text{monoton fallend} \\ =0, & x=\frac{9}{4} \quad\quad\quad\quad\quad \Rightarrow \text{ lokales Minimum } f(2{,}25)\approx-8{,}54 \\ >0, & x>\frac{9}{4} \quad \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

Da die Funktion überall stetig und asymptotisch auf beiden Seiten positiv unendlich ist, muss es ein globales Minimum geben, da sie überall differenzierbar ist, kann dieses nur in dem gerade ermittelten Punkt $x=\frac{9}{4}$ liegen. Der Wertebereich ist somit $\mathrm{WB}(f)=[f(\frac{9}{4}),\infty)$.

Mit 2. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Krümmung, Wendepunkte):

$f''(x)=12x^2-18x=6x(2x-3)$, $\quad f''(x)=0$ für $x=0$ und $x=\dfrac{3}{2}$

$$f''(x)=\begin{cases} >0, & x<0 \quad \text{konvex} \\ =0, & x=0 \quad\quad\quad \Rightarrow \text{ Wendepunkt } f(0)=0 \\ <0, & 0<x<\frac{3}{2} \quad \text{konkav} \\ =0, & x=\frac{3}{2} \quad\quad\quad \Rightarrow \text{ Wendepunkt } f(1{,}5)\approx-5{,}06 \\ >0, & x>\frac{3}{2} \quad \text{konvex} \end{cases}$$