

Aufgabe 12.113

Bestimmen Sie die n -te Ableitung von $y = xf(x)$!

Lösung:

$$y = xf(x)$$

$$y' = f(x) + xf'(x),$$

$$y'' = f'(x) + f'(x) + xf''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$$

$$y''' = 2f''(x) + f''(x) + xf'''(x) = 3f''(x) + xf'''(x)$$

...

$$y^{(n)} = nf^{(n-1)}(x) + xf^{(n)}(x)$$

Der Beweis erfolgt induktiv, denn aus der angegebenen Formel für $y^{(n)}$ folgt

$$y^{(n+1)} = nf^{(n)}(x) + f^{(n)}(x) + xf^{(n+1)}(x) = (n+1)f^{(n)}(x) + xf^{(n+1)}(x).$$