Aufgabe 12.107

Bestimmen Sie die Extrema und Wertebereiche folgender Funktionen:

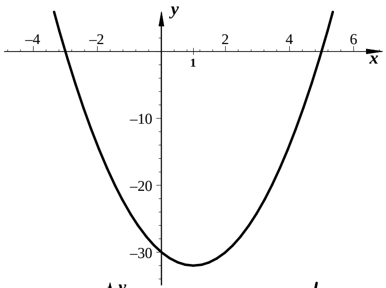
a) $y(x) = 4x - 17$,
b) $y(x) = 2x^2 - 4x - 30$,
c) $y(x) = x^3 - 3x^2$,
d) $y(x) = 50000 + 5000x - 0.1x^2$,
e) $y(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x}$!

Lösung:

a) $y' = 4 > 0$, überall monoton wachsend $\Big($Gerade durch $(0, -17)$ und $(\frac{17}{4}, 0)\Big)$, keine Extrema, $\text{WB} = \mathbb{R}$

b) $$y' = 4x-4 \begin{cases} <0 & x<1 \quad \text{monoton fallend} \\ =0 & x=1 \quad \Longrightarrow \text{ Min. } y(1)=-32 \\ >0 & x>1 \quad \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

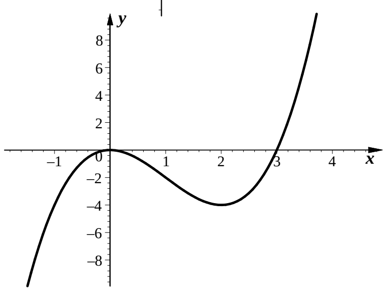
$\text{WB} = \{y : y \geq -32\}$



c) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$$y' = \begin{cases} >0 & x<0 & \text{monoton wachsend} \\ =0 & x=0 & \Longrightarrow \text{ Maximum } y(0)=0 \\ <0 & 0<x<2 & \text{monoton fallend} \\ =0 & x=2 & \Longrightarrow \text{ Minimum } y(2)=-4 \\ >0 & x>2 & \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

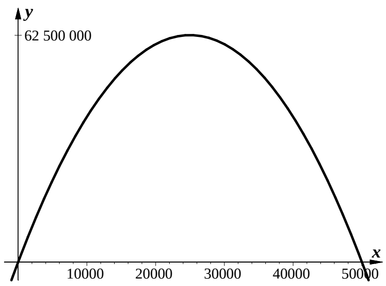
$\text{WB} = \mathbb{R}$



d) $$y' = 5000 - 0.2x \begin{cases} >0 & x<25000 & \text{monoton fallend} \\ =0 & x=25000 & \Longrightarrow \text{ Maximum} \\ >0 & x>25000 & \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

Das Maximum liegt bei $y(25000) = 62\,500\,000$, also gilt $\text{WB} = \{y : y \leq 62\,500\,000\}$. Davon kann man sich auch durch quadratische Ergänzung überzeugen:

$$y = -0.1(x^2 - 50\,000x - 500\,000) =$$
$$= -0.1\big((x-25\,000)^2 - 625\,000 - 500\,000\big)$$
$$= -0.1(x-25\,000)^2 - 0.1 \cdot 625\,500\,000$$



e) Definitionsbereich: $\{x : x \geq 0\}$,

$$y = x^{\frac{5}{2}} - 9x^{\frac{1}{2}}, \quad y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{5x^2-9}{2\sqrt{x}}$$

$y' = 0$ für $5x^2 - 9 = 0$, $x^2 = \frac{9}{5}$, $x = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.34$ wegen $x \geq 0$

$$y' = \begin{cases} <0 & x<\frac{3}{\sqrt{5}} & \text{monoton fallend} \\ =0 & x=\frac{3}{\sqrt{5}} & \Longrightarrow \text{ Minimum } y(\frac{3}{\sqrt{5}}) = (\frac{9}{5}-9)\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}} \approx -8.34 \\ >0 & x>\frac{3}{\sqrt{5}} & \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

$\text{WB} = \{y : y \geq -\frac{36}{5}\sqrt[4]{\frac{9}{5}} \approx -8.34\}$