Aufgabe 12.102

Sei $x>0$. Berechnen Sie die Elastizität der Funktion $f(x)=2x-\frac{3}{2}+\frac{1}{x}$! Wo ist die Funktion elastisch, proportionalelastisch bzw. unelastisch? Skizzieren Sie die Funktion und ihre Elastizitätsbereiche!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Lösung:

$$f(x)=2x-\frac{3}{2}+\frac{1}{x} \qquad\qquad \varepsilon_f(x)=\frac{\frac{2x^2-1}{x^2}}{\frac{2x^2-\frac{3}{2}x+1}{x}}\,x=\frac{2x^2-1}{2x^2-\frac{3}{2}x+1}$$
$$f'(x)=2-\frac{1}{x^2}$$

Die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen wird als „elastisch“ bezeichnet, wenn sie sich relativ stärker ändert als die andere, d.h., wenn die Elastiziät betragsmäßig größer als 1 ist. Entsprechend wird die Abhängigkeit unelastisch bezeichnet, wenn sich die abhängige Größe relativ schwächer ändert als die unabhängige. Proportionalelastisch heißt sie, wenn die Elastizität betragsmäßig gleich 1 ist.

Für die Auswertung von Ungleichungen für diese Elastizität ist eine Multiplikation mit dem Nenner erforderlich. Deshalb wird zunächst dessen Vorzeichen in Abhängigkeit von x ermittelt.

Nullstellen von $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$: $x_{1/2}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9}{64}-\frac{32}{64}}$, nicht reell. Da die Parabel nach oben offen ist und keine reellen Nullstellen hat, gilt immer $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}>0 \implies 2x^2-\frac{3}{2}x+1>0$.

Oder mit quadratischer Ergänzung: $2x^2-\frac{3}{2}x+1=2\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{18}{64}+1>0$, immer.

Die Funktion ist elastisch, wenn $\varepsilon_f(x)>1$ oder $\varepsilon_f(x)<-1$ gilt.

$$\varepsilon_f(x)>1:\ \frac{2x^2-1}{2x^2-\frac{3}{2}x+1}>1 \iff 2x^2-1>2x^2-\frac{3}{2}x+1 \iff \frac{3}{2}x>2 \iff x>\frac{4}{3},$$
$$f\left(\frac{4}{3}\right)=2\,\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{32-18+9}{12}=\frac{23}{12}$$

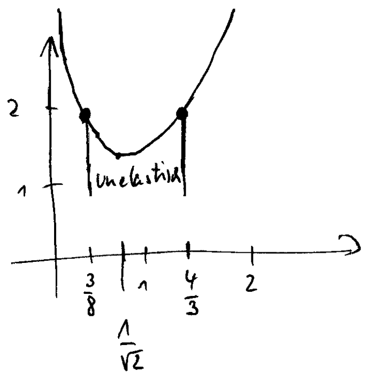
$$\varepsilon_f(x)<-1:\ \frac{2x^2-1}{2x^2-\frac{3}{2}x+1}<-1 \iff 2x^2-1<-2x^2+\frac{3}{2}x-1 \iff 4x^2<\frac{3}{2}x \iff x<\frac{3}{8}\ (\text{da } x>0),$$
$$f\left(\frac{3}{8}\right)=2\,\frac{3}{8}-\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{18-36+64}{24}=\frac{46}{24}=\frac{23}{12}$$

Die Funktion $f(x)$ ist also **elastisch** ($|\varepsilon_f(x)|>1$) in den Intervallen $\left(0,\frac{3}{8}\right)$ und $\left(\frac{4}{3},\infty\right)$.

Man überzeugt sich leicht davon, dass sie für $x=\frac{3}{8}$ und $\frac{4}{3}$ **proportionalelastisch** ($|\varepsilon_f(x)|=1$) ist, während sie im Intervall $\left(\frac{3}{8},\frac{4}{3}\right)$ **unelastisch** ($|\varepsilon_f(x)|<1$) ist.

Starr ($\varepsilon_f(x)=0$, d.h. kleine Änderung von x führt zu keiner Änderung von f) ist die Funktion für

$$2x^2-1=0 \iff x=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.7071, \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{3}{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\approx 1.3284$$


2
1
unelastisch
3/8
1
4/3
2
1/√2