

Aufgabe 12.101

Auf einen Ertrag x soll eine Steuer $S(x)$ erhoben werden. Dabei soll eine kubische Steuerfunktion $S(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ verwendet werden, die folgende Bedingungen erfüllt:

- Für $x=0$ soll keine Steuer erhoben werden und der Grenzsteuersatz 10 % betragen.
- Für $x=10$ soll die Elastizität der Steuerfunktion 2 betragen.
- Für $x=5$ soll der Grenzsteuersatz 37,5 % betragen

- a) Welche relative Erhöhung der Steuer hat eine Steigerung des Ertrages von $x=10$ aus um 0,5 % ungefähr zur Folge?
b) Ermitteln Sie die Steuerfunktion, die alle geforderten Bedingungen erfüllt!

Lösung:

a) $\frac{\Delta S}{S} \approx \varepsilon_S(x) \frac{\Delta x}{x} = 2 \cdot 0,5\% = \underline{\underline{1\%}}$

b) Grenzsteuersatz: $S'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$$S(0) = D = 0, \quad S'(0) = C = 0,1$$

$$\varepsilon_S(x) = \frac{S'(x)}{S(x)} x = \frac{3Ax^2 + 2Bx + C}{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D} = \frac{3Ax^2 + 2Bx + 0,1}{Ax^3 + Bx^2 + 0,1x}$$

$$\varepsilon_S(10) = \frac{3000A + 200B + 1}{1000A + 100B + 1} = 2, \quad 3000A + 200B + 1 = 2000A + 200B + 2, \quad 1000A = 1, \quad A = \frac{1}{1000}$$

$$S'(5) = \frac{3}{1000} 5^2 + 2B \cdot 5 + 0,1 = \frac{75}{1000} + 10B + \frac{100}{1000} = 37,5\% = \frac{375}{1000}, \quad 10B = \frac{200}{1000}, \quad B = \frac{1}{50}$$

$$\underline{\underline{S(x) = \frac{x^3}{1000} + \frac{x^2}{50} + \frac{x}{10} = 0,001x^3 + 0,02x^2 + 0,1x}}$$