Aufgabe 12.89

Ermitteln Sie für $f(x)=x^2$ näherungsweise mithilfe der Ableitung die absolute und mithilfe der Elastizität die relative Funktionsänderung, wenn x von $x=2$ aus um 5 %, d.h. um 0,1 erhöht wird! Vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den tatsächlichen Änderungen!

Lösung:

Ableitung: Verhältnis der absoluten Änderungen von 2 Größen: $\frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'(x)$

Elastizität: Verhältnis der relativen (oft prozentualen) Änderungen von 2 Größen:

$$\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}\,\frac{x}{f(x)} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'(x)\frac{x}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}x = \varepsilon_f(x)$$

$$f(x)=x^2,\quad f'(x)=2x,\quad f'(2)=4,\quad \varepsilon_f(2)=\frac{f'(2)}{f(2)}2=\frac{4}{4}2=2$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}\approx f'(x),\ \text{absolute Änderung } \Delta f \approx \underbrace{f'(x)\,\Delta x}_{\text{Differenzial}}=4\cdot 0{,}1=\underline{\underline{0{,}4}},$$

$$\text{exakt } \Delta f = f(2{,}1)-f(2)=4{,}41-4=\underline{\underline{0{,}41}}$$

$$\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}}\approx \varepsilon_f(x),\ \text{relative Änderung } \frac{\Delta f}{f}\approx \varepsilon_f(x)\frac{\Delta x}{x}=2\cdot 5\,\%=\underline{\underline{10\,\%}},$$

$$\text{exakt } \frac{\Delta f}{f}=\frac{f(2{,}1)-f(2)}{f(2)}=\frac{4{,}41-4}{4}=0{,}1025=\underline{\underline{10{,}25\,\%}}$$