

Aufgabe 12.88

Die Molwärme eines zweiatomigen Gases ist bei festem Volumen als Funktion der absoluten Temperatur T gegeben durch $c(T) = R \frac{(T_0/T)^2 e^{T_0/T}}{(e^{T_0/T} - 1)^2}$ mit der Gaskonstanten R und der charakteristischen Temperatur T_0 .

Berechnen Sie die Grenzwerte von $c(T)$ für $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow \infty$!

(Meyberg, K. und Vachenaue, P.: Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. 6. Aufl. Springer 2003, S. 129)

Lösung:

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird $x = \frac{T_0}{T}$ gesetzt. Mit der l'Hospital'schen Regel erhält man

$$\lim_{T \rightarrow 0+} c(T) = \lim_{x \rightarrow \infty} R \underbrace{\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}}_{\infty/\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} R \frac{2x e^x + x^2 e^x}{2(e^x - 1) e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} R \underbrace{\frac{2x + x^2}{2(e^x - 1)}}_{\infty/\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} R \underbrace{\frac{2 + 2x}{2e^x}}_{\infty/\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} R \frac{2}{2e^x} = 0$$

und

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c(T) = \lim_{x \rightarrow 0+} R \underbrace{\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}}_{0/0} = \lim_{x \rightarrow 0+} R \frac{2x e^x + x^2 e^x}{2(e^x - 1) e^x} = \lim_{x \rightarrow 0+} R \underbrace{\frac{2x + x^2}{2(e^x - 1)}}_{0/0} = \lim_{x \rightarrow 0+} R \frac{2 + 2x}{2e^x} = R.$$

(Begriffe:

Molwärme (nach [Wikipedia](#)): Die Molare Wärmekapazität (auch Molwärme) eines Stoffs ist eine seiner physikalischen Eigenschaften und bezeichnet dessen auf die Stoffmenge bezogene Wärmekapazität. Sie gibt also an, welche Energie man einer bestimmten Menge eines Stoffes zuführen muss, um seine Temperatur um ein Kelvin zu erhöhen. Die abgeleitete SI-Einheit der molaren Wärmekapazität ist daher kJ/(K·mol). Als Formelzeichen verwendet man in der Regel c_n .

Berechnung: Die Molare Wärmekapazität ist der Quotient aus Wärmekapazität und Stoffmenge: $c_n = c/n$, wobei c die Wärmekapazität ($c = \Delta Q/\Delta T$) und n die Stoffmenge ist.

Stoffmenge ([Wikipedia](#)): Mit Stoffmenge wird die quantitative Menge für Stoffe, insbesondere in der Stöchiometrie, bezeichnet. Diese Stoffmenge ist dabei weder Masse, noch Teilchenzahl, sondern im Internationalen Einheitensystem (SI) durch willkürliche Vereinbarung als Basisgröße eigener Art festgelegt.

Absolute Temperatur ([Wikipedia](#)): Der Begriff absolute Temperatur, auch thermodynamische Temperatur, bezeichnet einen Temperaturwert, der sich auf den absoluten Nullpunkt bezieht.

Charakteristische Temperatur (A. Eucken: Rückblicke auf die Entwicklung unserer Kenntnisse über die Molwärme der Gase. Naturwissenschaften, Springer 31(1943)27-28, 314-322, <http://www.springerlink.com/content/r846670033637161/>): Zunächst bestand die Aufgabe, zu prüfen, ob mittels der PLANCK'schen Formel in den einfachsten Fällen (bei Vorhandensein nur eines oder nur weniger Schwingungsfreiheitsgrade) wirklich eine Absolutberechnung der Schwingungswärme C_s , gelingt. Als Parameter tritt in der betreffenden Formel eine sog. charakteristische Temperatur Θ_s , auf, die aufs engste mit der Eigenfrequenz der betreffenden Schwingung ν_0 zufolge $\Theta_s = \frac{h\nu_0}{k} = 4.80 \cdot 10^{-11} \nu_0$ zusammenhängt ($h =$ PLANCK'sches elementares Wirkungsquantum, $k =$ BOLTZ-MANN'sche Konstante.).