Aufgabe 12.87

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cot x}$!

Lösung:

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0\pm 0}\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}=\pm\infty, \qquad \lim_{x\to 0\pm 0}\cot x=\pm\infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}:\ \text{l'Hospital:}\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\mathrel{\underset{\sim}{=}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\sin^2}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)$$

Für $x\to 0$ geht $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ (folgt aus l'Hospital), $\cos\dfrac{1}{x}$ schwankt zwischen -1 und $+1$

$\Longrightarrow\quad \dfrac{\sin^2 x}{x^2}+\dfrac{\sin^2}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ divergiert,

also l'Hospitalsche Regel <u>nicht</u> anwendbar (durch Wellenlinie markiertes Gleichheitszeichen oben falsch!).

Anderer Weg zur Berechnung des Grenzwerts:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\cot x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\tan x=0\quad \left(\text{da}\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1\right),$$

also $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cot x}=\underline{\underline{1}}$