Aufgabe 12.82

Seien a und b positive Parameter. Wenden Sie die l'Hospitalsche Regel auf folgende Grenzwerte an:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{bx}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{bx^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$, d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$!

Lösung:

a) $\dfrac{0}{0}: \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{bx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\sin ax}{b} = 0$

b) $\dfrac{0}{0}: \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{bx^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\sin ax}{2bx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^2\cos ax}{2b} = \dfrac{a^2}{2b}$

(Auch der zweite Grenzwert hat die Form $\dfrac{0}{0}$, deshalb ist die l'Hospitalsche Regel nochmals anwendbar.)

c) $\dfrac{-\infty}{-\infty}: \quad \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\frac{a\cos ax}{\sin ax}}{\frac{b\cos bx}{\sin bx}} = \dfrac{a}{b} \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\sin bx}{\sin ax} = \dfrac{a}{b} \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{b\cos bx}{a\cos ax} = 1$

(Der dritte Grenzwert hat die Form $\dfrac{0}{0}$, deshalb ist die l'Hospitalsche Regel nochmals anwendbar.)

d) $\dfrac{0}{0}: \quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x\ln a - a\,x^{a-1}}{1} = a^a\ln a - a\,a^{a-1} = a^a(\ln a - 1)$