Aufgabe 12.76

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{\frac{1}{x}}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^2}+\sin^2 x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+x)}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+\sin^2 x}$!

Lösung:

a) $\frac{0}{0}$, l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x}{3e^{3x}}=\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}}=\dfrac{0}{1}=0$

c) $\frac{0}{0}$, l'Hospital: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=-1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{0}=\infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^2}+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{\sin^2 x}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{\sin^2 x}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$

(Der Ausdruck hat die Form ∞/∞, die l'Hospitalsche Regel ist aber nicht anwendbar, da sich als Quotient der Ableitungen von Zähler und Nenner der für $x\to\infty$ unbestimmt divergierende Ausdruck $\dfrac{1+\cos x}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+2\sin x\cos x}$ ergibt.)

f) $\frac{0}{0}$, l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5e^{5x}}{\frac{1}{1+x}}=5$

g) $\frac{0}{0}$, l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x+2\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x+\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2+2\cos 2x}=\dfrac{1}{4}$