## Aufgabe 12.70

Als Rendite eines festverzinslichen Wertpapieres soll der fiktive effektive Jahreszinssatz für den Kaufwert bezeichnet werden, der sich ergibt, wenn man unterstellt, dass die vor der Endfälligkeit des Wertpapiers ausgezahlten Zinsen zum Zinssatz der Rendite wiederangelegt werden können. Ermitteln Sie die Rendite eines Papieres, das einen Kurswert von 105 % hat und mit 7 % p.a. vom Nennwert verzinst wird, wenn die Restlaufzeit

a) genau 1 Jahr, b) genau 2 Jahre, c) genau 3 Jahre

beträgt! Dabei soll die Rendite in den Fällen a) und b) exakt, im Falle c) mit dem Newtonverfahren bestimmt werden.

## Lösung:

Die Rendite soll durch Gleichsetzen der auf den Zeitpunkt der Endfälligkeit bezogenen Barwerte der Zahlungen des Anlegers und der Zahlungen des Emittenten ermittelt werden.

Der **Anleger** leistet nur zum Anlagezeitpunkt eine Zahlung und zwar je 100 Währungseinheiten Nennwert in Höhe von 105 Währungseinheiten. Bei einer Verzinsung zum Zinssatz der Rendite $p$ und einem entsprechenden Aufzinsungsfaktor von $q=p$ beträgt ihr Barwert
bei Kauf 105, nach 1 Jahr $105q$, nach 2 Jahren $105q^2$ und nach 3 Jahren $105q^3$.

Der **Emittent** zahlt nach 1 Jahr und ggf. nach 2 bzw. nach 2 und 3 Jahren je 100 Währungseinheiten Nennwert 7 Währungseinheiten, diese sind bis zur Endfälligkeit um den Faktor $q$ pro Jahr aufzuzinsen, außerdem zahlt er zum Zeitpunkt der Endfälligkeit den Nennwert.

a) Endfälligkeit nach 1 Jahr:

$$105q=\underbrace{7+100}_{\text{Zahlung nach 1 Jahr}},\qquad q=\frac{107}{105}\approx 1{,}019048,\quad p=q-1\approx \underline{\underline{1{,}90\,\%}}$$

b) Endfälligkeit nach 2 Jahren:

$$105q^2=\underbrace{7q}_{\substack{\text{nach 1 J.}\\ \text{für 1 Jahr}\\ \text{verzinst}}}+\underbrace{7+100}_{\text{nach 2 J.}},\quad q^2-\frac{7}{105}q-\frac{107}{105}=0,\quad q_{1/2}=\frac{1}{30}\pm\sqrt{\frac{1}{900}+\frac{107}{105}}\approx\begin{cases}\ \ 1{,}0434\\ -0{,}9767\ \text{scheidet aus}\end{cases}$$

$$p=q-1\approx\underline{\underline{4{,}34\,\%}}$$

c) Endfälligkeit nach 3 Jahren:

$$105q^3=\underbrace{7q^2}_{\substack{\text{nach 1 J.}\\ \text{für 2 Jahre}\\ \text{verzinst}}}+\underbrace{7q}_{\substack{\text{nach 2 J.}\\ \text{für 1 Jahr}\\ \text{verzinst}}}+\underbrace{7+100}_{\text{nach 3 Jahren}},\qquad f(q)=105q^3-7q^2-7q-107=0$$

Newtonverfahren: $$q_{n+1}=q_n-\frac{f(q_n)}{f'(q_n)}=q_n-\frac{105q_n^3-7q_n^2-7q_n-107}{315q_n^2-14q-7}$$

Die Rendite bei 3-jähriger Laufzeit ist größer als die bei 2-jähriger Laufzeit von 4,34 %, deshalb ist es sinnvoll, z.B. $q_0=1{,}05$ als Startwert für die Newtoniteration zu verwenden.

| $n$ | $q_n$ | $f(q_n)$ | $f'(q_n)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,050000000 | −0,516875000 | 325,587500000 |
| 1 | 1,051587515 | 0,000816336 | 326,616209747 |
| 2 | 1,051585016 | 0,000000002 | 326,614588905 |
| 3 | 1,051585015 | 0,000000000 | 326,614588901 |

Somit ist $q\approx 1{,}0516$, $p\approx\underline{\underline{5{,}16\,\%}}$.