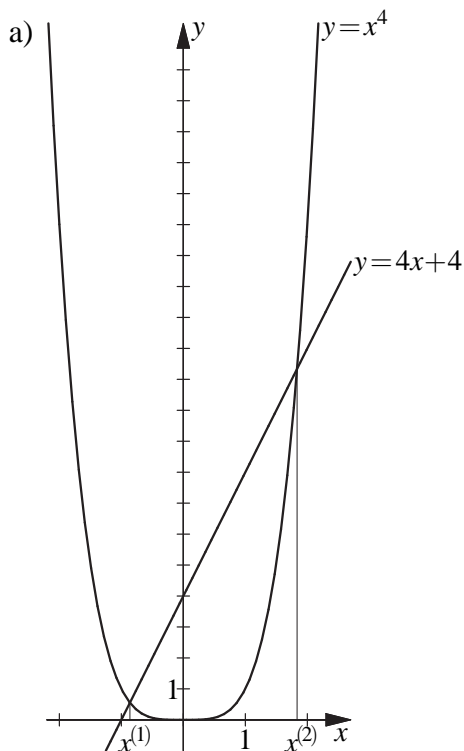


Aufgabe 12.69

Betrachtet wird die Gleichung $x^4 = 4x + 4$. Lösen Sie die folgenden Aufgaben a) bis c) ohne elektronische Hilfsmittel, für d) können Sie selbstverständlich solche Hilfsmittel benutzen.

- Ermitteln Sie auf grafischem Wege, wie viele reelle Lösungen diese Gleichung hat und wo diese ungefähr liegen!
- Nun soll die Gleichung näherungsweise mithilfe des Newtonverfahrens gelöst werden. Geben Sie die Iterationsvorschrift an und führen Sie vom Startwert $x_0 = 0$ ausgehend zwei Iterationsschritte aus!
- Wählen Sie einen zur Bestimmung einer anderen Lösung der Gleichung geeigneten Startwert und führen Sie von diesem ausgehend einen Iterationsschritt des Newtonverfahrens aus!
- Bestimmen Sie mithilfe des Newtonverfahrens alle Lösungen der Gleichung mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-8} ! Stellen Sie die dabei durchlaufenen Iterationspunkte tabellarisch dar!

Lösung:



Offensichtlich hat die Gleichung $x^4 = 4x + 4$ zwei reelle Lösungen und zwar zwischen -1 und 0 sowie zwischen 1 und 2 . Genauer ist $x^{(1)} \approx -0.9$ und $x^{(2)} \approx 1.8$.

b) $x^4 = 4x + 4 \iff f(x) = x^4 - 4x - 4 = 0$

Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n - 4}{4x_n^3 - 4}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0 - \frac{-4}{-4} = -1,$$

$$x_2 = -1 - \frac{1}{-8} = -\frac{7}{8} = -0.875$$

- c) (Da $f(x)$ für $x < 1$ streng monoton fallend und für $x > 1$ streng monoton wachsend ist, muss ein Startwert größer als 1 gewählt werden.)

z.B. $x_0 = 2, \quad x_1 = 2 - \frac{4}{28} = \frac{13}{7} \approx 1.857$

d)

=B2-(B2*B2*B2*B2-4)/(4*B2*B2*B2-4)		
A	B	C
1	i	x1_i
2	0	2,000000000
3	1	-1,000000000
4	2	-0,875000000
5	3	-0,862097953
6	4	-0,861982577
7	5	-0,861982568
8	6	-0,861982568
		1,857142857
		1,835548621
		1,835086890
		1,835086682
		1,835086682
		1,835086682

$$x^{(1)} \approx -0.86198257, \quad x^{(2)} \approx -1.83508668$$