Aufgabe 12.68

Die Gleichung $e^x = 3x$ soll mithilfe des Newtonverfahrens gelöst werden.

a) Ermitteln Sie zunächst eine Lösung dieser Gleichung ausgehend vom Startwert $x_0 = 1$!
b) Verwenden Sie nun den Startwert $x_0 = 1{,}1$! Erklären Sie den dabei zu beobachtenden Effekt!
c) Wieviele Lösungen hat die Gleichung?
d) Bestimmen Sie die evtl. noch fehlenden Lösungen mithilfe des Newtonverfahrens!

Lösung:

a) Zu bestimmen sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = e^x - 3x$. Die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens lautet $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - 3x_n}{e^{x_n} - 3}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	1,0000000000	−0,2817181715	−0,2817181715
1	0,0000000000	1,0000000000	−2,0000000000
2	0,5000000000	0,1487212707	−1,3512787293
3	0,6100596550	0,0103622280	−1,1594588071
4	0,6189967797	0,0000737235	−1,1429359373
5	0,6190612834	0,0000000039	−1,1428161461
6	0,6190612867	0,0000000000	−1,1428161398
7	0,6190612867	0,0000000000	−1,1428161398
8	0,6190612867	0,0000000000	−1,1428161398

$$\underline{\underline{x^* = 0{,}6190612867}}$$

b)

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	1,1000000000	−2,958E−01	4,166E−03
1	72,1111079191	2,077E+31	2,077E+31
2	71,1111079191	7,641E+30	7,641E+30
3	70,1111079191	2,811E+30	2,811E+30
...	...	...	...
64	9,1129760751	9,045E+03	9,069E+03
65	8,1156597498	3,322E+03	3,343E+03
66	7,1220444379	1,218E+03	1,236E+03
67	6,1369039991	4,442E+02	4,596E+02
68	5,1704333119	1,605E+02	1,730E+02
69	4,2427566938	5,687E+01	6,660E+01
70	3,3888280170	1,946E+01	2,663E+01
71	2,6579290264	6,293E+00	1,127E+01
72	2,0993876223	1,863E+00	5,161E+00
73	1,7384214931	4,731E−01	2,688E+00
74	1,5624431157	8,313E−02	1,770E+00
75	1,5154878737	5,178E−03	1,552E+00
76	1,5121510261	2,531E−05	1,536E+00
77	1,5121345521	6,156E−10	1,536E+00
78	1,5121345517	0,000E+00	1,536E+00
79	1,5121345517	0,000E+00	1,536E+00
80	1,5121345517	0,000E+00	1,536E+00

Da die Tangente für $x_0 = 1{,}1$ sehr flach ist (Anstieg $0{,}4 \cdot 10^{-3}$) führt die Iteration zunächst sehr weit weg. Die folgenden Iterationspunkte sind wegen $f(x_n) \approx f'(x_n)$ jeweils ca. 1 voneinander entfernt.

(Führt man die Iteration dennoch ausreichend lange fort, so erreicht man in der Nähe der bei ca. 1,5 liegenden Lösung doch wieder eine schnelle Konvergenz.)

Der gewählte Startpunkt ist deshalb so schlecht, weil er in der Nähe des Minimums von $f(x)$ liegt, in dem die Tangente waagerecht und das Newtonverfahren damit nicht anwendbar ist: $f'(x) = e^x - 3 = 0$ gilt für $x = \ln 3 \approx 1{,}0986$.

c) Offensichtlich gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - 3x) = 0 - (-\infty) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(e^x - 3x) = \infty$, da exponentielles sehr viel größer als lineares Wachstum ist.

Ferner ist $f'(x) = e^x - 3 \begin{cases} < 0 & x < \ln 3 \quad f(x) \text{ streng mon. fallend} \\ = 0 & x = \ln 3 \qquad\qquad \Longrightarrow \text{Min. bei } f(\ln 3) \approx -0{,}2958 \\ > 0 & x > \ln 3 \quad f(x) \text{ streng mon. wachsend} \end{cases}$

Da die Funktion $f(x)$ zunächst von $+\infty$ zum negativen Minimum streng monoton fällt und von dort wieder streng monoton nach $+\infty$ wächst, hat sie genau 2 reelle Nullstellen, nämlich je eine links und rechts vom Minimum.

d) Wenn die zweite Nullstelle nicht schon bei b) ermittelt wurde, erhält man sie mit dem Newtonverfahren bei Wahl eines geeigneten Startwerts rechts von $\ln 3$, z.B. mit $x_0 = 2$:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	2,0000000000	1,3890560989	4,3890560989
1	1,6835182628	0,3339118655	2,3844666539
2	1,5434819721	0,0504146377	1,6808605540
3	1,5134886228	0,0020845605	1,5425504288
4	1,5121372501	0,0000041460	1,5364158963
5	1,5121345517	0,0000000000	1,5364036550
6	1,5121345517	0,0000000000	1,5364036550
7	1,5121345517	0,0000000000	1,5364036550

$x^* = 1{,}5121345517$