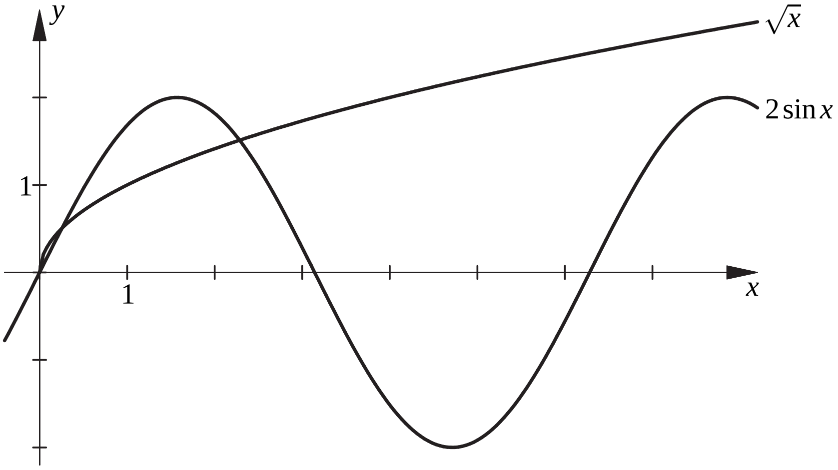
Aufgabe 12.64

Lösen Sie mithilfe des Newtonverfahrens die Gleichung $\sqrt{x} = 2\sin x$! Lassen sich alle Lösungen der Gleichung damit ermitteln?

Hinweis: Fertigen Sie zur Bestimmung geeigneter Startwerte eine Skizze an!

Lösung:



Offensichtlich gibt es drei Lösungen, die erste ist $\underline{\underline{x^{(1)} = 0}}$, für die Bestimmung der anderen beiden kann man z.B. die Startnäherungen $x_0^{(2)} = 0{,}5$ und $x_0^{(3)} = 2$ verwenden.

Die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Nullstellenbestimmung von $f(x) = \sqrt{x} - 2\sin x$ lautet $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\sqrt{x_n} - 2\sin x_n}{\frac{1}{2\sqrt{x_n}} - 2\cos x_n}$.

B3 =B2-((WURZEL(B2)-2*SIN(B2))/(1/(2*WURZEL(B2))-2*COS(B2)))

n	x^(2)_n	x^(3)_n		x^(1)_n	x^(1)_n	x^(1)_n
0	0,5	2		0,01	0,001	0,0001
1	0,2597993491	2,3410062762		-0,0166658889	-0,0011448079	-0,0001041667
2	0,2555257714	2,2860406921		Err:502	Err:502	Err:502
3	0,2555123278	2,2847621066				
4	0,2555123276	2,2847613900				
5	0,2555123276	2,2847613900				

Also gilt $\underline{\underline{x^{(2)} \approx 0{,}2555123276}}$ und $\underline{\underline{x^{(3)} \approx 2{,}2847613900}}$.

Die Lösung $x^{(1)} = 0$ bekommt man mit dem Newtonverfahren allenfalls dann, wenn man sie selbst als „Startnäherung“ benutzt, was freilich ziemlich unsinnig ist, wenn sie als Lösung ja schon bekannt ist. Immerhin schneidet dort die senkrechte Tangente an $f(x)$ die x-Achse im Berührungspunkt, das ist eben gerade die Lösung.

Für jede andere in der Nähe von 0 liegende Startnäherung funktioniert das Newtonverfahren allerdings nicht, da es im ersten Iterationsschritt auf einen negativen Wert führt, für den die Funktion $f(x)$ nicht definiert ist. Das wird in der Tabelle oben demonstriert.

(Will man den zuletzt beschriebenen Sachverhalt exakt begründen, kann man damit argumentieren, dass für $x \to 0$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\sqrt{x} - 2\sin x}{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\cos x} = \frac{2x - 4\sqrt{x}\sin x}{1 - 4\sqrt{x}\cos x} = \frac{2x\,(1 - 2\overbrace{\sqrt{x}}^{\to 0}\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\to 1})}{1 - 4\underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0}\underbrace{\cos x}_{\to 1}} \approx 2x$$

ist, so dass für in der Nähe von 0 liegende Startwerte $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx x_0 - 2x_0 = -x_0$ gilt.)