## Aufgabe 12.51

Die Höhe einer Fichte in cm in Abhängigkeit vom Alter $t$ in Jahren werde durch die Funktion $h(t)=\dfrac{4000}{1+9\,\mathrm{e}^{-0{,}058t}}-400$ beschrieben.

a) Wie ist der Definitionsbereich sinnvollerweise zu wählen, welcher Wertebereich ergibt sich? Wie groß kann die Fichte maximal werden?

b) Differenzieren Sie die Funktion $h(t)$ ! Mit welcher Geschwindigkeit wächst die Fichte im Alter von 10 Jahren?

c) Geben Sie das Differenzial von $h$ bezüglich $t$ zum Zeitpunkt $t=10$ an! Um welchen Betrag würde die Fichte in 3, 6, 12 bzw. 24 Monaten wachsen, wenn sie die Wachstumsgeschwindigkeit, die sie zum Zeitpunkt $t=10$ erreicht hat, beibehalten würde?

d) Vergleichen Sie die in c) berechneten Zahlenwerte des Differenzials mit dem tatsächlichen Höhenzuwachs in den angegebenen Zeiträumen!

e) Die Zeit $t$ sei mit einer Genauigkeit von 1 Monat zu $t=10$ bestimmt. Schätzen Sie mithilfe des Differenzial den Fehler bei der Bestimmung von $h(t)$ ab!

f) In welchem Alter erreicht die Fichte eine Höhe von 16 m? Wie groß ist die Wachstumsgeschwindigkeit in diesem Alter?

## Lösung:

a) Sinnvollerweise muss $t\geq 0$ gelten, also $\mathrm{DB}(h)=[0,\infty)$.

Da die Exponentialfunktion überall streng monoton wachsend ist, ist $\mathrm{e}^{-0.058t}$ und damit auch der Nenner $1+9\mathrm{e}^{-0.058t}$ streng monoton fallend, ihre Reziprokes und damit auch $h(t)$ wiederum überall streng monoton wachsend. An den Rändern gilt $h(0)=\dfrac{4000}{1+9}-400=0$ und $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=\dfrac{4000}{1+9\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-0.058t}}-400=\dfrac{4000}{1+9\cdot 0}-400=3600$. Da die Funktion überall monoton wachsend ist, folgt $\mathrm{WB}(h)=[0,3600)$.

Also kann die Fichte maximal 36 m groß werden, wobei sie diese Höhe formal nie ganz erreicht.

b) $h'(t)=\dfrac{4000\cdot 9\cdot 0.058\,\mathrm{e}^{-0.058t}}{(1+9\mathrm{e}^{-0.058t})^2},\qquad h'(10)=\dfrac{2088\,\mathrm{e}^{-0.58}}{(1+9\,\mathrm{e}^{-0.58})^2}\approx 32.055$

Im Alter von 10 Jahren wächst die Fichte mit einer Geschwindigkeit von ca. 32 cm/a.

c) $\mathrm{d}h=h'(10)\,\mathrm{d}t=32.055\,\mathrm{d}t=32.055\,\Delta t$

$$\begin{array}{lll}
\text{3 Monate:} & \Delta t=0.25, & \mathrm{d}h=8.01\ [\mathrm{cm}]\\
\text{6 Monate:} & \Delta t=0.5, & \mathrm{d}h=16.03\ [\mathrm{cm}]\\
\text{12 Monate:} & \Delta t=1, & \mathrm{d}h=32.06\ [\mathrm{cm}]\\
\text{24 Monate:} & \Delta t=2, & \mathrm{d}h=64.11\ [\mathrm{cm}]
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{llllll}
\text{3 Monate:} & \Delta h=h(10.025)-h(10) & =270.40-262.35= & 8.05\ [\mathrm{cm}] & \approx & \mathrm{d}h=8.01\ [\mathrm{cm}]\\
\text{6 Monate:} & \Delta h=h(10.05)-h(10) & =278.45-262.35= & 16.18\ [\mathrm{cm}] & \approx & \mathrm{d}h=16.03\ [\mathrm{cm}]\\
\text{12 Monate:} & \Delta h=h(11)-h(10) & =295.03-262.35= & 32.68\ [\mathrm{cm}] & \approx & \mathrm{d}h=32.06\ [\mathrm{cm}]\\
\text{24 Monate:} & \Delta h=h(12)-h(10) & =328.97-262.35= & 66.62\ [\mathrm{cm}] & \approx & \mathrm{d}h=64.11\ [\mathrm{cm}]
\end{array}$$

e) Wegen $|\Delta t|\leq\dfrac{1}{12}$ gilt $|\Delta h|\approx|\mathrm{d}h|=|h'(10)\,\Delta t|=|h'(10)|\,|\Delta t|\leq\dfrac{|h'(10)|}{12}=\dfrac{32.055}{12}=2.671.$

Der Fehler bei der Höhenbestimmung beträgt maximal ca. 2,7 cm.

f) $\dfrac{4000}{1+9\,\mathrm{e}^{-0.058t}}-400=1600,\quad \dfrac{4000}{1+9\,\mathrm{e}^{-0.058t}}=2000,\quad 2=1+9\,\mathrm{e}^{-0.058t},\quad \dfrac{1}{9}=\mathrm{e}^{-0.058t}$

$\mathrm{e}^{0.058t}=9,\quad 0.058t=\ln 9,\quad t=\dfrac{\ln 9}{0.058}\approx 37.88$

Im Alter von knapp 38 Jahren erreicht die Fichte die Höhe von 16 m.

Für $t=\dfrac{\ln 9}{0.058}$ gilt $\mathrm{e}^{-0.058t}=\dfrac{1}{9}$ und damit $h'\left(\dfrac{\ln 9}{0.058}\right)=\dfrac{4000\cdot 9\cdot 0.058\cdot \frac{1}{9}}{\left(1+9\cdot\frac{1}{9}\right)^2}=1000\cdot 0.058=58,$

so dass die Fichte in diesem Alter um 58 cm pro Jahr wächst.