Aufgabe 12.49

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{e^{\sqrt{x}-1}}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ im Punkt $x_0 = 1$!
b) Geben Sie mithilfe des Ergebnisses von a) Näherungswerte für $f(1{,}001)$, $f(1{,}01)$, $f(1{,}1)$ und $f(2)$ an und vergleichen Sie diese mit den tatsächlichen Funktionswerten!
c) Notieren Sie für die Situationen in b) jeweils Differenzial $\mathrm{d}f$ und tatsächliche Funktionswertänderung Δf !

Lösung:

a) $f(1) = \sqrt{e^0} = 1, \qquad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}-1}}}\, e^{\sqrt{x}-1}\, \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{e^{\sqrt{x}-1}}}{4\sqrt{x}}, \quad f'(1) = \dfrac{1}{4}$

Tangente $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + \dfrac{1}{4}(x-1)$

b)
$$\begin{array}{lll}
x = 1{,}001: & T(1{,}001) = 1{,}00025, & f(1{,}001) \approx 1{,}00024997 \\
x = 1{,}01: & T(1{,}01) = 1{,}0025, & f(1{,}01) \approx 1{,}00249689 \\
x = 1{,}1: & T(1{,}1) = 1{,}025, & f(1{,}1) \approx 1{,}02470465 \\
x = 2: & T(2) = 1{,}25, & f(2) \approx 1{,}23011392
\end{array}$$

c) Das Differenzial von $f(x)$ für $x_0 = 1$ ist $\mathrm{d}f = f'(x_0)\mathrm{d}x = f'(x_0)\Delta x = \dfrac{1}{4}\Delta x$.

$$\begin{array}{lll}
\Delta x = 0{,}001: & \mathrm{d}f = 0{,}00025 & \approx \Delta f = f(x) - f(x_0) \approx 0{,}00024997 \\
\Delta x = 0{,}01: & \mathrm{d}f = 0{,}0025 & \approx \Delta f = f(x) - f(x_0) \approx 0{,}00249689 \\
\Delta x = 0{,}1: & \mathrm{d}f = 0{,}025 & \approx \Delta f = f(x) - f(x_0) \approx 0{,}02470465 \\
\Delta x = 1: & \mathrm{d}f = 0{,}25 & \approx \Delta f = f(x) - f(x_0) \approx 0{,}23011392
\end{array}$$