Aufgabe 12.27

Offensichtlich gilt $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $y = \mathrm{e}^h - 1$, dass die Exponentialfunktion e^x abgeleitet sich selbst ergibt, dass heißt, gleich ihrem Anstieg ist!

Lösung:

$y = \mathrm{e}^h - 1, \quad \mathrm{e}^h = 1 + y, \quad h = \ln(1+y), \quad$ für $h \to 0$ gilt wegen $\mathrm{e}^h \to 1$ auch $y \to 0$.

$$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \mathrm{e}^x \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \mathrm{e}^x \lim_{y\to 0} \frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$= \mathrm{e}^x \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}\right)} = \mathrm{e}^x \frac{1}{\ln \mathrm{e}} = \mathrm{e}^x \frac{1}{1} = \mathrm{e}^x$$