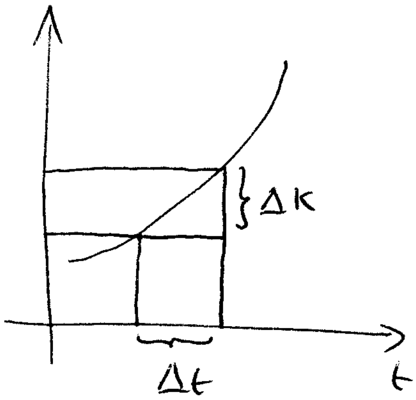
Aufgabe 12.21

Das Anfangskapital $K(0)$ werde zu p p.a. kontinuierlich verzinst (s. Aufg. 10.34), $t \in \mathbb{R}$ sei die Zeit in Jahren.

a) Zeigen Sie, dass das Kapital proportional zu seiner Höhe wächst! Wie groß ist der Proportionalitätsfaktor?
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $K(t)$ im Punkt $(\bar{t}, K(\bar{t}))$!
c) In welchem Punkt schneidet die Tangente die t–Achse?

Lösung:

a) Nach Aufgabe 10.34a) gilt $q_{\text{kont}} = \mathrm{e}^p$ und damit $K(t) = K(0)(\mathrm{e}^p)^t = K(0)\mathrm{e}^{pt}$.



Maß für das Wachstum von $K(t)$:
Änderung von $K(t)$ in Abhängigkeit von t

$\dfrac{\Delta K}{\Delta t}$: Anstieg der Sekante

örtliches Wachstum:
$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta K}{\Delta t} = K'(t)$: Anstieg der Tangente

Ableitung: Verhältnis der absoluten Änderungen von 2 Größen

$$K'(t) = K(0)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{pt} = K(0)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(pt)}\mathrm{e}^{pt}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}pt \quad \text{(Kettenregel)}$$
$$= K(0)\,\mathrm{e}^{pt}\,p, \ \text{ also } \ K'(t) = K(t)\cdot p, \ \ K'(t) \sim K(t), \ \text{Proportionalitätsfaktor } p$$

(vgl. Aufgabe 21.10)

b) Allgemein: Anstieg der Tangente im Punkt x_0: $f'(x_0)$,
Geradengleichung der Tangente (Polynom 1. Grades): $P_1(x) = f'(x_0)\cdot x + c$,
im Berühungspunkt: $P_1(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + c = f(x_0)$, d.h. $c = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$, also
$P_1(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$

Approximation der Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_0 durch die **Tangente** (Taylorentwicklung bis zum linearen Glied): $f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$

Konkret: $K(t) \approx P_1(t) = K(\bar{t}) + K'(\bar{t})\,(t - \bar{t}) = K(\bar{t}) + K(\bar{t})\,p\,(t - \bar{t}) = \underline{\underline{pK(\bar{t})\,t + (1 - p\bar{t})K(\bar{t})}}$

c) Schnitt mit t-Achse: $pK(\bar{t})\,t + (1 - p\bar{t})K(\bar{t}) = 0$, $\quad t = \dfrac{(p\bar{t} - 1)K(\bar{t})}{pK(\bar{t})} = \bar{t} - \dfrac{1}{p}$

Die Tangente an die Kurve $K(t)$ im Punkt $(\bar{t}, K(\bar{t}))$ schneidet die t-Achse im Punkt $\left(\bar{t} - \dfrac{1}{p}, 0\right)$.