Aufgabe 12.19

Sei $f(x) = \sqrt{x^2+9}$.

a) Differenzieren Sie die Funktion!

b) Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x_0 = 4$ durch eine Gerade und geben Sie dort das Differenzial an!

c) Bestimmen Sie damit Näherungswerte für $f(4{,}01)$ und $f(4{,}1)$ und vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den exakten Funktionswerten an diesen Stellen! Notieren Sie für diese Situationen jeweils auch das Differenzial $\mathrm{d}f$ und die tatsächliche Funktionswertänderung Δf !

d) x sei mit einer Genauigkeit von $0{,}1$ zu 4 bestimmt. Schätzen Sie mit Hilfe des Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $f(x)$ ab!

Lösung:

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\,2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

b) Approximation der Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_0 durch die Tangente (Taylorentwicklung bis zum linearen Glied): $f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)$

Anstieg der Tangente: $f'(1) = \dfrac{4}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$

$$f(x) \approx P_1(x) = f(4) + f'(4)\,(x-4) = 5 + \frac{4}{5}(x-4) = \frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$$

Differenzial: $\mathrm{d}f = f'(4)\,\Delta x = \dfrac{4}{5}\Delta x = \dfrac{4}{5}\mathrm{d}x$,

d.h.: Die absolute Änderung von f ist ungefähr 0,8 mal so groß wie die von x.

c) $f(4{,}01) \approx P_1(4{,}01) = f(4) + f'(4)\cdot 0{,}01 = 5 + \dfrac{4}{5}\cdot 0{,}01 = 5{,}008, \quad f(4{,}01) = 5{,}0080035942,$
$\mathrm{d}f(0{,}01) = 0{,}008 \approx \Delta f = 0{,}0080035942$

$f(4{,}1) \approx P_1(4{,}1) = f(4) + f'(4)\cdot 0{,}1 = 5 + \dfrac{4}{5}\cdot 0{,}1 = 5{,}08, \quad f(4{,}1) = 5{,}0803543184,$
$\mathrm{d}f(0{,}1) = 0{,}08 \approx \Delta f = 0{,}0803543184$

d) Da das Vorzeichen des Fehlers von x nicht bekannt ist, muss der Betrag des Fehlers von f abgeschätzt werden:

$$|\Delta f| \approx |\mathrm{d}f| = |f'(x_0)\,\Delta x| = |f'(x_0)|\cdot|\Delta x|$$

Aus $|\Delta x| \le 0{,}1$ folgt dann $|\Delta f| \lessapprox |f'(4)|\cdot 0{,}1 = \dfrac{4}{5}\cdot 0{,}1 = 0{,}08.$