Aufgabe 12.18

Sei $f(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^2 + 2$.

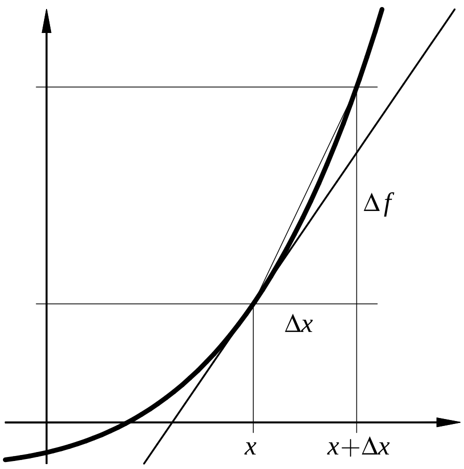
a) Differenzieren Sie die Funktion!

b) Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x_0 = 1$ durch eine Gerade und geben Sie dort das Differenzial an! Bestimmen Sie damit Näherungswerte für $f(1{,}01)$ und $f(1{,}02)$ und vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den exakten Funktionswerten an diesen Stellen!

c) x sei mit einer Genauigkeit von 0,01 zu 1 bestimmt. Schätzen Sie mit Hilfe des Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $f(x)$ ab!

Lösung:

a)



Anstieg der Sekante: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

$\Delta x \to 0 \quad \longrightarrow$ Anstieg der Tangente

$\boxed{\textbf{Ableiten heißt linearisieren.}}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Für kleine Δx : $\qquad f'(x) \approx \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Beim Ableiten wird die Funktion linearisiert, d.h. durch eine einfachere Funktion, nämlich eine Gerade (lineare Funktion), ersetzt. Bei dieser Gerade handelt es sich um die Tangente im Ableitungspunkt.

Ableitung: Anstieg der Funktion,
Maß für das (absolute) Wachstum einer Funktion,
Verhältnis der absoluten Änderungen von 2 Größen (nämlich von Δf zu Δx)

$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (cu)' = cu', \quad (x^n)' = nx^{n-1}$

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^2 + 2, \qquad f'(x) = 5x^4 - 5 \cdot 4x^3 + 6 \cdot 2x + 2 \cdot 0 = 5x^4 - 20x^3 + 12x$

b) Anstieg der Tangente: $f'(1) = 5 - 20 + 12 = -3$

Allgemein:

Anstieg der Tangente im Punkt x_0: $f'(x_0)$,
Geradengleichung der Tangente (Polynom 1. Grades): $P_1(x) = f'(x_0) \cdot x + c$,
im Berühungspunkt: $P_1(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + c = f(x_0)$, d.h. $c = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, also
$P_1(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Approximation der Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_0 durch die **Tangente** (Taylorentwicklung bis zum linearen Glied): $f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Konkret: $f(x) \approx P_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 4 - 3(x - 1) = -3x + 7$

Wegen $f'(x_0) \approx \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ gilt $\Delta f \approx f'(x_0)\,\Delta x$. Da der Punkt x_0 fixiert ist, ist die rechte Seite eine Funktion von Δx. Sie wird als **Differenzial** bezeichnet:

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}f\,(\Delta x) = f'(x_0)\,\Delta x.$$

Die Bezeichnungsweise ist vielleicht auf der ersten Blick etwas irritierend. Deshalb soll ausdrücklich betont werden, dass „$\mathrm{d}f\,(\Delta x)$“ den Zusammenhang zwischen dem Argument Δx und dem zugehörigen Funktionswert $\mathrm{d}f$ beschreibt, so wie „$f(x)$“ den Zusammenhang zwischen dem Argument x und dem Funktionswert f beschreibt.

Betrachtet man x als Funktion von sich selbst, so ist ihre Ableitung $x'(x) = 1$, folglich gilt $\mathrm{d}x = x'(x)\Delta x = \Delta x$.

Das Differenzial $\mathrm{d}f$ gibt an, wie sich der Funktionswert ändern würde, wenn $f(x)$ eine lineare Funktion wäre. **Beim Differenzial handelt sich also um eine Linearisierung des Zuwachses.** Es gilt $$\Delta f \approx \mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x = f'(x_0)\,\Delta x.$$ Die tatsächliche Funktionswertänderung wird umso besser erfasst, je kleiner Δx ist.

Durch Division durch $\mathrm{d}x$ erhält man $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Den rechts stehendenden Ausdruck nennt man **Differenzialquotient**. Es gilt: $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Mit den Differenzialen kann weitgehend wie mit Zahlen gerechnet werden, d.h., der Differenzialquotient kann als Bruch verstanden werden.

Während dieser Bruch, also die Ableitung $f'(x)$, das Verhältnis der absoluten Änderungen der Größen f und x beschreibt, beschreibt das Differenzial $\mathrm{d}f$, wie sich der Funktionswert bei einer Änderung $\Delta x = \mathrm{d}x$ des Argumentes ändert. Beides gilt nur näherungsweise und unter der Voraussetzung kleiner Argumentänderungen, es ist umso genauer, je kleiner die Argumentänderung ist. Deshalb stellt man sich Differenziale oft als „sehr kleine“ bzw. „infinitesimal kleine“ Änderungen vor. Entscheidend bleibt aber, dass $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$ zueinander im Verhältnis $f'(x)$ stehen.

Wegen $\Delta x = x - x_0$ gilt $f(x_0 + \Delta x) \approx P_1(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x = f(x_0) + \mathrm{d}f$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \mathrm{d}f$.

Konkret: $\mathrm{d}f = f'(1)\,\Delta x = -3\,\Delta x = -3\,\mathrm{d}x$,
d.h.: Die absolute Änderung von f ist ungefähr -3 mal so groß wie die von x.

$f(1{,}01) \approx P_1(1{,}01) = f(1) + f'(1) \cdot 0{,}01 = 4 - 3 \cdot 0{,}01 = 3{,}97$, $f(1{,}01) = 3{,}9685900001$,
$\mathrm{d}f(0{,}01) = -0{,}03 \approx \Delta f = -0{,}0314099999$

$f(1{,}02) \approx P_1(1{,}02) = f(1) + f'(1) \cdot 0{,}02 = 4 - 3 \cdot 0{,}02 = 3{,}94$, $f(1{,}02) = 3{,}9343200032$,
$\mathrm{d}f(0{,}02) = -0{,}06 \approx \Delta f = -0{,}0656799968$

c) Das Differenzial wird z.B. in der Fehlerrechnung eingesetzt. Da das Vorzeichen des Fehlers von x nicht bekannt ist, muss der Betrag des Fehlers von f abgeschätzt werden:

$|\Delta f| \approx |\mathrm{d}f| = |f'(x_0)\,\Delta x| = |f'(x_0)| \cdot |\Delta x|$

Aus $|\Delta x| \leq 0{,}01$ folgt dann $|\Delta f| \underset{\approx}{\leq} |f'(1)| \cdot 0{,}01 = 3 \cdot 0{,}01 = 0{,}03$.