

Aufgabe 12.13

Beweisen Sie, dass jedes Polynom ungerader Ordnung stets mindestens eine reelle Nullstelle hat, während es für gerade Ordnungen immer Polynome gibt, die keine reellen Nullstellen haben!

Lösung:

Für Polynome ungerader Ordnung n folgt aus $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_n(x) = -\lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x)$ und der Stetigkeit von $P_n(x)$ die Existenz einer reellen Nullstelle.

Ist die Ordnung n gerade, so hat z.B. das Polynom $P_n(x) = x^n + 1$ keine reelle Nullstelle, da ja dann für alle reellen x die gerade Potenz x^n nichtnegativ und damit $x^n + 1 \geq 1$ ist.